BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANŢA 2021
31 martie 2021

1. Morgane şi Bosphore joacă următorul joc. Morgane a scris numerele naturale de la 1 la 8 în vârfurile unui octogon regulat: fiecare număr natural este scris pe câte unul din cele 8 vârfuri ale octogonului. Bosphore alege apoi unul dintre vârfuri şi calculează suma numerelor scrise pe acest vârf şi pe cei doi vecini ai acestuia. Notează cu s această sumă şi îi dă s bomboane lui Morgane.
Bosphore alege vârful astfel încât să îi dea lui Morgane cât mai puţine bomboane, iar Morgane scrie numerele de la 1 la 8 astfel încât să primească cât mai multe bomboane.
Demonstraţi că Bosphore îi va da lui Morgane 12 bomboane.

2. Fie x, y, z trei numere reale astfel încât $0 \leq x \leq y \leq z$ şi $x + y + z = 1$. Determinaţi valoarea maximă pe care o poate lua expresia

$$(x - yz)^2 + (y - zx)^2 + (z - xy)^2.$$

3. Fie ABC un triunghi astfel încât $90^\circ > m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle BCA)$. Fie D un punct pe latura $[BC]$ astfel încât $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle BCA)$. Notăm cu E punctul de intersecţie, diferit de A, dintre (AB) şi cercul circumscris triunghiului ACD, iar cu P punctul de intersecţie dintre (AB) şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDE$. Analog, notăm cu F punctul de intersecţie, diferit de A, dintre (AC) şi cercul circumscris triunghiului ABD, iar cu Q punctul de intersecţie dintre (AC) şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle CDF$.
Demonstraţi că AB şi PQ sunt perpendiculare.

4. Găsiţi toate tripletele de numere naturale nenule (a, b, c) pentru care

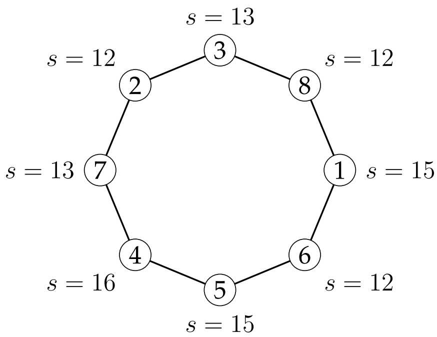
$$2021^a + 4 = 3^b \cdot 5^c.$$

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii oficiale:

1. Morgane şi Bosphore joacă următorul joc. Morgane a scris numerele naturale de la 1 la 8 în vârfurile unui octogon regulat: fiecare număr natural este scris pe câte unul din cele 8 vârfuri ale octogonului. Bosphore alege apoi unul dintre vârfuri şi calculează suma numerelor scrise pe acest vârf şi pe cei doi vecini ai acestuia. Notează cu s această sumă şi îi dă s bomboane lui Morgane.
Bosphore alege vârful astfel încât să îi dea lui Morgane cât mai puţine bomboane, iar Morgane scrie numerele de la 1 la 8 astfel încât să primească cât mai multe bomboane.
Demonstraţi că Bosphore îi va da lui Morgane 12 bomboane.

Soluţia 1:
Mai întâi să observăm că dacă Morgane scrie numerele în felul următor, atunci ea va primi de la Bosphore 12 bomboane.



Am indicat în dreptul fiecărui vârf suma s pe care ar calcula-o Bosphore dacă ar alege acel vârf.
Aşadar, Morgane îşi poate asigura 12 bomboane.
Vom arăta acum că indiferent de aranjarea numerelor în vârfurile octogonului, Bosphore poate alege mereu un vârf cu suma cel mult 12.
Dacă vecinii lui 8 sunt 1 şi 2, Bosphore va alege vârful 8 şi va trebui să-i dea lui Morgane numai 11 bomboane.
Rămâne cazul în care 8 are cel puţin un vecin $k \geq 3$. Separăm numerele 8 şi un vecin $k \geq 3$ al său. Grupăm cele şase numere rămase. Cele şase numere se pot grupa în două triplete disjuncte de câte trei numere vecine. Suma celor şase numere este $1 + 2 + 3 + \ldots + 7 - k = 28 - k \leq 25$, deci cel puţin una dintre cele două sume este mai mică sau egală cu 12. Alegând numărul mijlociu din respectivul grup de 3, Bosphore îi va de cel mult 12 bomboane lui Morgane.

Soluţia 2: Bosphore are şi alte căi de a proceda, precum cea de mai jos. Considerăm trei grupuri formate din câte trei numere consecutive pe cerc astfel încât singurul număr considerat în două grupuri să fie numărul 1. (Notăm numere de pe cerc, în ordine, cu $x_1, x_2, \ldots, x_8$ astfel încât $x_1 = 1$ şi considerăm sumele $x_1+x_2+x_3$, $x_4+x_5+x_6$ şi $x_7+x_8+x_1$.) Suma celor trei sume este $(1+2+\ldots+8)+1 = 37 < 3\cdot 13$, deci cel puţin una dintre sume este mai mică sau egală cu 12. Bosphore poate alege vârful cu numărul x_2 sau x_5 sau x_8, după caz.

Soluţia 3: Iată o a treia manieră pentru Bosphore de a se asigura că îi va da cel mult 12 bomboane lui Morgane. Fie a şi b cei doi vecini ai numărului 5, cu $a \geq b$. Dacă $b \leq 4$, atunci $a \leq 3$, deci $a+b+5 \leq 12$ şi Bosphore poate alege vârful 5. În caz contrar, avem deja că $b \geq 6$. Bosphore elimină atunci vârfurile adiacente cu 5 şi b şi face din cele şase numere rămase două grupe disjuncte de câte trei numere vecine. Suma numerelor din aceste două grupe este cel mult $1+2+3+4+7+8 = 25$, deci una din cele două grupe are suma numerelor mai mică sau egală cu 12; Bosphore poate alege acest grup.

Soluţia 4: Iată încă o cale de a arăta că Bosphore îi va da lui Morgane cel mult 12 bomboane. Spre deosebire de soluţiile precedente, calea de faţă îi va furniza lui Bosphore o startegie explicită de a alege un vârf cu suma cel mult 12. Să presupunem că Morgan ar fi găsit o configuraţie care să-l oblige pe Bosphore să-i dea cel puţin 13 bomboane. Numerotăm vârfurile octogonului de la 1 la 8, aceste numere fiind considerate modulo 8. Notăm cu a_i numărul scris de Morgane în vârful i şi cu s_i suma $s_i = a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$. Să observăm că două sume consecutive nu pot fi egale deoarece $s_{i+1} - s_i = (a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) - (a_{i-1} + a_i + a_{i+1}) = a_{i+2} - a_{i-1} \neq 0$. Atunci suma a oricare două sume consecutive este cel puţin $13 + 14 = 27$.
Pe de altă parte, suma celor 8 sume s_i este $3(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) = 3(1 + 2 + \ldots + 8) = 108 = 4 \cdot 27$. Deducem că suma a două sume consecutive este mereu 27, astfel că sumele de 13 şi 14 trebuie să alterneze. Atunci $s_1 = s_3 = s_5 = s_7$ şi $s_2 = s_4 = s_6 = s_8$. În aceste condiţii constatăm că

$$0 = (s_2 - s_3) + (s_5 - s_6) = (a_1 - a_4) + (a_4 - a_7) = a_1 - a_7,$$

adică $a_1 = a_7$, ceea ce nu se poate. Astfel Morgane nu-l va putea forţa pe Bosphore să-i dea 13 sau mai multe bomboane.

2. Fie x, y, z trei numere reale astfel încât $0 \leq x \leq y \leq z$ şi $x + y + z = 1$. Determinaţi valoarea maximă pe care o poate lua expresia

$$(x - yz)^2 + (y - zx)^2 + (z - xy)^2.$$

Soluţia 1: Cantitatea pe care dorim să o maximizăm poate fi rescrisă
$S = (x^2+y^2+z^2) + \big((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\big) - 6xyz = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) - 6xyz = 1 - 2(xy+yz+zx) + (xy+yz+zx)^2 - 8xyz = (xy + yz + zx - 1)^2 - 8xyz$.
Cum $0 \leq xy + yz + zx \leq \dfrac{(x + y + z)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$, deducem că $S \leq 1$.
Reciproc, pentru $x = y = 0$ şi $z = 1$ avem într-adevăr $S = 1$, deci valoarea maximă

a expresiei din enunţ este 1.

Soluţia 2: Cantitatea pe care dorim să o maximizăm poate fi rescrisă
$S = (x^2 + y^2 + z^2) + \big((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2\big) - 6xyz = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) + \big((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2\big) - 6xyz.$
Ori enunţul spune că $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$, astfel că $0 \leq xy \leq xz \leq yz \leq 1$. Cum orice număr t cu proprietatea $0 \leq t \leq 1$ satisface inegalitatea $t^2 \leq 2t$, deducem că $S \leq (x+y+z)^2 - 6xyz \leq 1$. Reciproc, pentru $x = y = 0$ şi $z = 1$ avem într-adevăr $S = 1$, de unde concluzia.

Soluţia 3: Inegalităţile $0 \leq x \leq y \leq z \leq x + y + z = 1$ arată că $z \geq y \geq xy$ şi $y \geq x \geq zx$, astfel că S satisface inegalitatea

$$S \leq \max\{x, yz\}^2 + y^2 + z^2.$$

Cum $x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2 = 1$ şi $(yz)^2 + y^2 + z^2 \leq 2yz + y^2 + z^2 = (y + z)^2 = (1 - x)^2 \leq 1$, deducem că $S \leq 1$.
Reciproc, pentru $x = y = 0$ şi $z = 1$ avem într-adevăr $S = 1$, de unde concluzia.

3. Fie ABC un triunghi astfel încât $90^\circ > m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle BCA)$. Fie D un punct pe latura $[BC]$ astfel încât $2m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle BCA)$. Notăm cu E punctul de intersecţie, diferit de A, dintre (AB) şi cercul circumscris triunghiului ACD, iar cu P punctul de intersecţie dintre (AB) şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDE$. Analog, notăm cu F punctul de intersecţie, diferit de A, dintre (AC) şi cercul circumscris triunghiului ABD, iar cu Q punctul de intersecţie dintre (AC) şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle CDF$.
Demonstraţi că AB şi PQ sunt perpendiculare.

Soluţie: Notăm $x = \sphericalangle BCA$ şi $y = \sphericalangle DAC$. Atunci $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 2x + y$ şi

$$2 \cdot \sphericalangle CDQ = \sphericalangle CDF = 180^\circ - \sphericalangle FDB = \sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC = 180^\circ - 2(x + y),$$

astfel că $\sphericalangle CDQ = 90^\circ - x - y$. Analog,

$$2 \cdot \sphericalangle PDB = \sphericalangle EDB = 180^\circ - \sphericalangle CDE = \sphericalangle EAC = \sphericalangle BAC,$$

de unde $\sphericalangle PDB = 90^\circ - x - y$.
De aici rezultă că $\sphericalangle QDA = 180^\circ - \sphericalangle DAQ - \sphericalangle AQD = 180^\circ - y - (180^\circ - \sphericalangle DQC) = (180^\circ - \sphericalangle CDQ - \sphericalangle QCD) - y = 90^\circ$. Problema revine la a arăta că punctele A, P, D, Q sunt conciclice. Avem $\sphericalangle DPA = 180^\circ - \sphericalangle BPD = \sphericalangle PDB + \sphericalangle DBP = (90^\circ - x - y) + (x + 2y) = 90^\circ + y = 180^\circ - \sphericalangle AQD$, de unde concluzia.

4. Găsiţi toate tripletele de numere naturale nenule (a, b, c) pentru care

$$2021^a + 4 = 3^b \cdot 5^c.$$

Soluţie: În cazul unor ecuaţii diofantice, începem întotdeauna prin a vedea ce se întâmplă pentru valori mici ale variabilelor. Aici este suficient să-l descompunem în factori pe $2021^a + 4$, deci examinăm valorile mici ale lui a. Pentru $a = 1$ ecuaţia devine $2025 = 3^b \cdot 5^c$, deci $(a, b, c) = (1, 4, 2)$. În schimb, dacă $a \geq 2$, nimeni n-are chef să-l descompună pe $2021^a + 4$ deci ne oprim aici cu analiza cazurilor mici.
Pasul următor este fie să-l descompunem în factori pe $2021^a + 4$, fie să privim ecuaţia modulo un număr n bine ales pentru a reduce mulţimea valorilor posibile ale variabilelor a, b, c.
Numerele 3 şi 5 sunt evident prime, iar studiul cazului $a = 1$ ne arată că $2021 = 45^2 - 4 = 43 \cdot 47$. Notăm aşadar această relaţie într-un colţ al ciornei aşteptând momentul să ne servim de ea.
În fine, folosind eventual teorema chinezească a resturilor, reducem ecuaţia noastră modulo n unde n este puterea unui număr prim. De exemplu:
• $n = 2$ şi $n = 5$ nu e aduc nicio informaţie.;
• $n = 3$ arată că a este impar;
• $n = 4$ arată că b este par;
• $n = 7$ nu ne aduce nicio informaţie uşor de interpretat;
• deoarece a este impar, iar b este par, analiza modulo $n = 8$ ne arată că c este par.
Fie atunci $\beta = b/2$ şi $\gamma = c/2$. Doi dintre cei trei termeni ai ecuaţiei noastre sunt pătrate perfecte, ceea ce ne permite să obţinem descompunerea

$$2021^a = 43^a \cdot 47^2 = (3^\beta \cdot 5^\gamma)^2 - 4 = (3^\beta \cdot 5^\gamma - 2)(3^\beta \cdot 5^\gamma + 2).$$

Deoarece numerele $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2$ şi $3^\beta \cdot 5^\gamma + 2$ sunt două numere impare a căror diferenţă este 4, cele două numere sunt prime între ele, astfel că unul singur dintre ele este divizibil cu 43^a şi unul singur este divizibil cu 47^a. Sunt, apriori, posibile mai multe cazuri:
• dacă 47 divide $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2$, atunci 47^a divide $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2$, deci $47^a \leq 3^\beta \cdot 5^\gamma - 2 < 3^\beta \cdot 5^\gamma + 2 \leq 43^a$, ceea ce nu se poate;
• dacă 43 şi 47 divid $3^\beta \cdot 5^\gamma + 2$, atunci $3^\beta \cdot 5^\gamma + 2 = 43^a \cdot 47^a$ şi $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2 = 1$, ceea ce nu se poate deoarece $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2 \geq 3 \cdot 5 - 2 = 13$.
Rămâne că 47 divide $3^\beta \cdot 5^\gamma + 2$, iar 43 divide $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2$, adică $3^\beta \cdot 5^\gamma + 2 = 47^a$ şi $3^\beta \cdot 5^\gamma - 2 = 43^a$, ceea ce implică $47^a - 43^a = 4$. Dar $4 = 47^a - 43^a \geq 47 \cdot 43^{a-1} - 43^a = 4 \cdot 43^{a-1}$, deci $a = 1$.
În concluzie, singura soluţie a problemei este $(1, 4, 2)$.