BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2021
14 februarie 2021

1. Fie a, b, c, d patru numere reale. Presupunem că există o permutare (x, y, z, t) a numerelor a, b, c şi d astfel încât

$$x \leq 2a - b,\ y \leq 2b - c,\ z \leq 2c - d \text{ şi } t \leq 2d - a.$$

Demonstraţi că $a = b = c = d$.

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Notăm cu D piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC, apoi cu E mijlocul segmentului $[AD]$ şi cu ω cercul de diametru $[AD]$. Fie X punctul de intersecţie dintre ω şi dreapta BE astfel încât B şi X să fie situate de o parte şi de alta a dreptei AD. Analog, fie Y punctul de intersecţie dintre ω şi dreapta CE, astfel ca C şi Y să fie situate de o parte şi de alta a dreptei AD. În fine, presupunem că există un punct Z, diferit de D, aparţinând dreptei AD şi cercurilor circumscrise triunghiurilor BDX şi CDY.
Demonstraţi că $AB = AC$.

3. Fie $k \geq 1$ un număr natural şi A o submulţime a lui $\{1, 2, \ldots, 3k\}$ astfel încât, pentru orice trei elemente a, b, c ale lui A, dacă $a + b = 2c$, atunci $a = b = c$.
Pentru orice număr natural nenul n notăm cu $r_k(n)$ cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $3k$ divide $n - r_k(n)$.
De asemenea, spunem că n este *mic* mic dacă $n \leq k$, că n este *mijlociu* dacă $k + 1 \leq n \leq 2k$ şi că n este *mare* dacă $2k + 1 \leq n$.
În fine, presupunem că dispunem de două numere naturale nenule x şi d astfel încât $r_k(x)$, $r_k(x + d)$ şi $r_k(x + 2d)$ aparţin toate trei lui A şi $r_k(x) \neq r_k(x + d)$.
Date fiind informaţiile de mai sus, care dintre afirmaţiile de mai jos este în mod necesar adevărată:
a) cel puţin unul dintre numerele naturale $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ este mijlociu sau mare?
b) cel puţin unul dintre numerele naturale $r_k(x)$ şi $r_k(x + d)$ este mic sau mare?
c) cel puţin unul dintre numerele naturale $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ este mic sau mijlociu?

4. Fie $(F_k)_{k\geq 0}$ şirul definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ şi $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi că există exact F_{n+1} moduri de a aranja numerele $1, 2, \ldots, n$ într-un n-uplu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ astfel încât

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \ldots \leq na_n.$$

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii oficiale:

1. Fie a, b, c, d patru numere reale. Presupunem că există o permutare (x, y, z, t) a numerelor a, b, c şi d astfel încât

$$x \leq 2a - b,\ y \leq 2b - c,\ z \leq 2c - d \text{ şi } t \leq 2d - a.$$

Demonstraţi că $a = b = c = d$.

Soluţia 1:
Pentru a exploata mai bine prima inegalitate, pe care o rescriem sub forma $x + b \leq 2a$, ar fi ideal ca x şi b să fie maxime, sau ca a să fie minim. Evident, este perfect posibil ca nici a, nici b şi nici x să nu fie extremale. Însă, deoarece variabilele joacă roluri ciclice, putem totuşi ca a să fie minimal, sau ca b să fie maximal, sau ca x să fie maximal. Pe de altă parte, a spera ca b şi x să fie simultan maximale are fi să cerem prea mult. În loc de asta, ne vom mulţumi să presupunem, fără a pierde din generalitate, că a este cel mai mic dintre cele patru numere reale. În aceste condiţii, $2a \leq b + x \leq 2a$, deci $a = b$. Dar atunci şi b este cel mai mic dintre cele patru numere reale, deci $b = c$ şi se arată analog că $c = d$.

Soluţia 2:
Adunând cele patru inegalităţi din enunţ obţinem inegalitatea $x + y + z + t \leq a + b + c + d$. Deoarece (x, y, z, t) este o permutare a lui (a, b, c, d), această ultimă inegalitate este de fapt o egalitate, deci fiecare din cele patru inegalităţi din enunţ este de asemenea o egalitate: $x = 2a - b$, $y = 2b - c$, $z = 2c - d$ şi $t = 2d - a$. Ridicând fiecare membru la pătrat şi adunând egalităţile astfel obţinute, constatăm atunci că $a^2+b^2+c^2+d^2 = x^2+y^2+z^2+t^2 = 5(a^2+b^2+c^2+d^2)-4(ab+bc+cd+da)$. Acest lucru arată că $ab + bc + cd + da = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, adică $0 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)-2(ab+bc+cd+da) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$, astfel că $a = b = c = d$.

Soluţia 3:
O altă manieră de a finaliza rezolvarea de mai sus este aceea de a observa că egalitatea $ab + bc + cd + da = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ este un caz de egalitate al inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-Schwarz[1], care nu este atins decât atunci când cvadrupletele (a, b, c, d) şi (b, c, d, a) sunt proporţionale. Deoarece ele au aceeaşi sumă, ele sunt egale, de unde concluzia.

Soluţia 4:
O altă variantă a celor două soluţii precedente este următoarea:
scăzând, la nevoie, un număr real λ suficient de mare din toate numerele, putem presupune că fiecare termen al fiecărei inegalităţi este negativ. Ridicând inegalităţile la pătrat şi adunând inegalităţile obţinute constatăm că $a^2+b^2+c^2+d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 4(ab + bc + cd + da)$. Acest lucru arată o

[1] sau, la fel de bine, al inegalităţii rearanjamentelor

dată în plus că $ab + bc + cd + da \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, de unde finalizăm ca mai sus.

Soluţia 5: Aici este prezentată şi o soluţie lungă, pe 24 de cazuri. Personal nu văd interesul să o prezint aici.

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Notăm cu D piciorul înălţimii din A a triunghiului cABC, apoi cu E mijlocul segmentului $[AD]$ şi cu ω cercul de diametru $[AD]$. Fie X punctul de intersecţie dintre ω şi dreapta BE astfel încât B şi X să fie situate de o parte şi de alta a dreptei AD. Analog, fie Y punctul de intersecţie dintre ω şi dreapta CE, astfel ca C şi Y să fie situate de o parte şi de alta a dreptei AD. În fine, presupunem că există un punct Z, diferit de D, aparţinând dreptei AD şi cercurilor circumscrise triunghiurilor BDX şi CDY.
Demonstraţi că $AB = AC$.

Soluţia 1:
Deoarece E este centrul cercului ω, avem $EX = EY = EA$. Faptul că cercurile circumscrise triunghiurilor BDX şi CDY se intersectează în D şi încă un punct al dreptei AD arată că axa lor radicală este dreapta AD. Cum $E \in AD$, E are puteri egale faţă de cele două cercuri, deci $BE \cdot EX = CE \cdot EY$. Dar $EX = EY$ implică atunci $BE = CE$, deci triunghiul BEC este isoscel. Atunci înălţimea ED este şi mediană, adică $BD = DC$. Atunci şi în triunghiul ABC înălţimea AD este şi mediană, deci triunghiul este isoscel.

Soluţia 2:
Fie ω_0 cercul de diametru $[EZ]$ şi ω_b cercul care trece prin punctele B, D, X şi Z. Cum $m(\sphericalangle BDZ) = 90°$, $[BZ]$ este un diametru al lui ω_b. Deducem că $m(\sphericalangle EXZ) = m(\sphericalangle BXZ) = 90°$, deci X este unul dintre punctele de intersecţie a cercurilor ω şi ω_0. Analog Y este unul dintre punctele de intersecţie a cercurilor ω şi ω_0.
Fie s simetria de axă AD: ea lasă cercurile ω şi ω_0 nemodificate (pentru că axa de simetrie AD trece prin centrele acestor cercuri), deci ea îl duce pe X în Y şi pe Y în X. Cum $s(E) = E$ (deoarece $E \in AD$), simetria transformă dreapta EX în dreapta EY (şi invers). În plus simetria lasă nemodificată dreapta BC (deoarece $BC \perp AD$), deci ea schimbă între ele punctele B şi C. Cum $s(A) = A$, deducem că $s([AB]) = [AC]$, deci $AB = AC$.

3. Fie $k \geq 1$ un număr natural şi A o submulţime a lui $\{1, 2, \ldots, 3k\}$ astfel încât, pentru orice trei elemente a, b, c ale lui A, dacă $a + b = 2c$, atunci $a = b = c$.
Pentru orice număr natural nenul n notăm cu $r_k(n)$ cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $3k$ divide $n - r_k(n)$.
De asemenea, spunem că n este *mic* dacă $n \leq k$, că n este *mijlociu* dacă $k + 1 \leq n \leq 2k$ şi că n este *mare* dacă $2k + 1 \leq n$.
În fine, presupunem că dispunem de două numere naturale nenule x şi d astfel

încât $r_k(x)$, $r_k(x+d)$ şi $r_k(x+2d)$ aparţin toate trei lui A şi $r_k(x) \neq r_k(x+d)$.
Date fiind informaţiile de mai sus, care dintre afirmaţiile de mai jos este în mod necesar adevărată:
a) cel puţin unul dintre numerele naturale $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ este mijlociu sau mare?
b) cel puţin unul dintre numerele naturale $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ este mic sau mare?
c) cel puţin unul dintre numerele naturale $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ este mic sau mijlociu?

Soluţie neoficială: (a se vedea şi problema NT5 din JBMO ShL 2020)

a) Vom arăta că pentru $k \geq 2$ răspunsul este negativ, adică este posibil ca amândouă să fie mici. Căutăm x şi $x+d$ astfel încât $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ să fie mici. Dacă $k \geq 2$, putem alege $x = 2$ şi $d = 3k-1$. Atunci numerele x, $x+d$ şi $x+2d$ sunt 2, $3k+1$ şi $6k$, astfel că $r_k(x) = 2 \leq k$, $r_k(x+d) = 1 \leq k$ sunt mici, iar $r_k(x+2d) = 3k$. Numerele $1, 2, 3k$ pot să aparţină lui A, de pildă dacă $A = \{1, 2, 3k\}$, mulţime în care niciun element nu este media aritmetică a celorlalte două.
Pentru $k = 1$ nu este posibil ca $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ să fie simultan mici deoarece singurul număr mic este 1, iar $r_k(x) \neq r_k(x+d)$.
b) Vom arăta că afirmaţia este adevărată. Presupunând contrariul, ar exista x şi $x+d$ cu $r_k(x) \neq r_k(x+d)$, $k+1 \leq r_k(x)$, $r_k(x+d) \leq 2k$. Atunci avem modulo $3k$ următoarea congruenţă: $x+2d = 2(x+d)-x \equiv 2r_k(x+d)-r_k(x) \pmod{3k}$. Dar $2r_k(x+d)-r_k(x) \geq 2(k+1)-2k = 2$ şi $2r_k(x+d)-r_k(x) \leq 1 \cdot 2k-(k+1)$, deci $r_k(x+2d) = 2r_k(x+d)-r_k(x)$, ceea ce arată că dacă $a = r_k(x)$, $c = r_k(x+d)$ şi $b = r_k(x+2d)$ sunt toate trei în A, atunci $a+b = 2c$, deci $a = b = c$. Aşadar, dacă $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ sunt ambele mijlocii, atunci $r_k(x) = r_k(x+d)$, ceea ce nu convine.
c) Vom arăta că pentru $k \geq 2$ răspunsul este negativ, adică este posibil ca amândouă să fie mari. Căutăm x şi $x+d$ astfel încât $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ să fie mari. Dacă $k \geq 2$, putem alege $x = 3k-1$ şi $d = 1$. Atunci numerele x, $x+d$ şi $x+2d$ sunt $3k-1$, $3k$ şi $3k+1$, astfel că $r_k(x) = 3k-1 \geq 2k+1$, $r_k(x+d) = 3k \geq 3k$ sunt mari, iar $r_k(x+2d) = 1$. Numerele $1, 3k-1, 3k$ pot să aparţină lui A, de pildă dacă $A = \{1, 3k-1, 3k\}$, mulţime în care niciun element nu este media aritmetică a celorlalte două.
Pentru $k = 1$ nu este posibil ca $r_k(x)$ şi $r_k(x+d)$ să fie simultan mari deoarece singurul număr mare este 3, iar $r_k(x) \neq r_k(x+d)$.

4. Fie $(F_k)_{k\geq 0}$ şirul definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ şi $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi că există exact F_{n+1} moduri de a aranja numerele $1, 2, \ldots, n$ într-un n-uplu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ astfel încât

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \ldots \leq na_n.$$

Soluţia 1: Spunem despre o permutare $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a numerelor $1, 2, \ldots, n$ că este *frumoasă* dacă ea satisface $a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \ldots \leq na_n$.
Fie, pentru început, o permutare frumoasă. Dacă există un număr natural k pentru

care $a_k \leq k-2$, alegem k minimal cu această proprietate. În acest caz, ştim că $2 \leq k$ şi că $a_{k-1} \geq k-2 \geq a_k$, astfel că $a_{k-1} \geq a_k+1$. Deducem că

$$(k-1)a_{k-1} \geq (k-2)(a_k+1) = ka_k + (k-a_k-1) \geq ka_k+1,$$

deci permutarea a nu este frumoasă. Conchidem că $a_k \geq k-1$ pentru orice $k \leq n$.
Pe de altă parte, fie $\ell \leq n$ acel număr natural pentru care $a_\ell = n$. Folosind rezultatul de mai sus, prin inducţie înapoi rezultă că $a_k = k-1$ pentru orice k cu proprietatea $\ell+1 \leq k \leq n$. (Într-adevăr, $a_n \geq n-1$ şi $a_n \neq n$ implică $a_n = n-1$. Atunci $a_{n-1} \geq n-2$, dar a_{n-1} nu poate fi nici $n-1$, nici n pentru că acestea sunt deja luate, deci $a_{n-1} = n-2$. Continuând acest procedeu deducem că $a_k = k-1$ pentru orice $k > \ell$.)
Apoi, fiindcă $\ell n = \ell a_\ell \leq (\ell+1)a_{\ell+1} = (\ell+1)\ell$, deducem că ℓ poate fi numai $n-1$ sau n.
Astfel, pentru ca a să fie frumoasă, există două posibilităţi (cazuri disjuncte):
• fie $\ell = n$, adică $a_n = n$, caz în care a este frumoasă dacă şi numai dacă permutarea $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ a numerelor $1, 2, \ldots, n-1$ este frumoasă;
• fie $\ell = n-1$, adică $a_{n-1} = n$. În acest caz, din $(n-1)a_{n-1} \leq na_n$ rezultă $a_n = n-1$ şi a este frumoasă dacă şi numai dacă permutarea $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ a numerelor $1, 2, \ldots, n-2$ este frumoasă.
Prin urmare, dacă notăm cu J_n numărul permutărilor frumoase ale numerelor $1, 2, \ldots, n$, avem $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$. În plus, $J_1 = 1 = F_2$ şi $J_2 = 2 = F_3$ arată că $J_n = F_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$.

Soluţia 2: Ca la soluţia 1, considerăm o permutare oarecare a şi indicele ℓ pentru care $a_\ell = n$. Deoarece $na_k \geq ka_k \geq la_\ell = \ell n$ pentru orice $k \geq \ell$ ştim că $\{a_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_n\} = \{\ell, \ell+1, \ldots, n\}$ deci a permută numerele $\ell, \ell+1, \ldots, n$ şi, separat, permută numerele $1, 2, \ldots, \ell-1$.
Presupunând că $\ell \leq n-1$, fie m acel indice pentru care $a_m = \ell$. Deoarece $m \geq \ell$, avem $m\ell = ma_m \geq \ell a_\ell = \ell n$, deci $m = n$. Dar atunci $ka_k = \ell n$ pentru orice k cu $\ell \leq k \leq n$. Din $(n-1)a_{n-1} = \ell n$ deducem că $n-1$ divide ℓ, deci că $\ell = n-1$.
Odată ce am arătat că avem fie $a_{n-1} = n$, fie $a_n = n$, finalizăm ca la soluţia 1.