BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2021
6 ianuarie 2021

1. Fie $n = 2021$. Demonstraţi că numărul $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ este divizibil cu 35.

2. Fie n şi k două numere naturale, cu $n \geq 3$. Théo organizează alegerile pentru reprezentanţii clasei sale care are n elevi: fiecare elev trebuie să voteze pentru unul dintre colegii săi (toţi elevii din clasă pot fi votaţi) şi nimeni nu se poate vota pe sine însuşi. Apoi Théo împarte elevii în grupe astfel încât, dacă un elev se află într-una dintre grupe, elevul pe care acesta l-a votat se află într-o altă grupă.
Pentru ce valori ale lui k este Théo sigur că poate împărţi elevii în cel mult k grupe, indiferent de modul în care au votat elevii?

3. Şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ este definit în felul următor: $a_1 = 63$ şi, pentru orice număr natural $n \geq 2$, a_n este cel mai mic multiplu al lui n care este mai mare sau egal ca a_{n-1}. Demonstraţi că termenii şirului sunt diferiţi doi câte doi.

4. Fie $P_1P_2 \ldots P_{2021}$ un poligon convex cu 2021 de laturi cu proprietatea că, pentru fiecare vârf P_i, cele 2018 diagonale care pleacă din P_i împart unghiul $\widehat{P_i}$ în 2019 unghiuri egale. Demonstraţi că $P_1P_2 \ldots P_{2021}$ este un poligon regulat, adică un poligon care are toate unghiurile de aceeaşi măsură şi toate laturile de aceeaşi lungime.

Timp de lucru: 4 ore