BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2021
6 ianuarie 2021

1. Fie $n = 2021$. Demonstraţi că numărul $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ este divizibil cu 35.

2. Fie n şi k două numere naturale, cu $n \geq 3$. Théo organizează alegerile pentru reprezentanţii clasei sale care are n elevi: fiecare elev trebuie să voteze pentru unul dintre colegii săi (toţi elevii din clasă pot fi votaţi) şi nimeni nu se poate vota pe sine însuşi. Apoi Théo împarte elevii în grupe astfel încât, dacă un elev se află într-una dintre grupe, elevul pe care acesta l-a votat se află într-o altă grupă.
Pentru ce valori ale lui k este Théo sigur că poate împărţi elevii în cel mult k grupe, indiferent de modul în care au votat elevii?

3. Şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ este definit în felul următor: $a_1 = 63$ şi, pentru orice număr natural $n \geq 2$, a_n este cel mai mic multiplu al lui n care este mai mare sau egal ca a_{n-1}. Demonstraţi că termenii şirului sunt diferiţi doi câte doi.

4. Fie $P_1P_2 \ldots P_{2021}$ un poligon convex cu 2021 de laturi cu proprietatea că, pentru fiecare vârf P_i, cele 2018 diagonale care pleacă din P_i împart unghiul $\widehat{P_i}$ în 2019 unghiuri egale. Demonstraţi că $P_1P_2 \ldots P_{2021}$ este un poligon regulat, adică un poligon care are toate unghiurile de aceeeaşi măsură şi toate laturile de aceeaşi lungime.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

1. Fie $n = 2021$. Demonstraţi că numărul $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ este divizibil cu 35.

Soluţia 1: Vom demonstra că numărul $S_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ este divizibil cu 5 şi cu 7 atunci când $n = 2021$.
Se verifică imediat că $S_n \equiv 9^n \cdot 3 + 2^n \cdot 4 \equiv 2^n \cdot 3 + 2^n \cdot 4 \equiv 2^n \cdot 7 \equiv 0 \pmod 7$ (asta pentru orice n) şi că, dacă $n \equiv 1 \pmod 4$, atunci $9^n \cdot 3$ are ultima cifră 7, iar 2^{n+2} are ultima cifră 8, deci S_n are ultima cifră 5, ceea ce arată că, pentru $n \equiv 1 \pmod 4$ (în particular pentru $m = 2021$), S_n este multiplu de 5.

Soluţia 2: Din mica teoremă a lui Fermat avem că $2^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod 5$. Cum $2n + 1 = 4043 \equiv 3 \pmod 4$ şi $n + 2 = 2023 \equiv 3 \pmod 4$, deducem că $s_n \equiv 3^3 + 2^3 \equiv 35 \equiv 0 \pmod 5$.
De asemenea, mica teoremă a lui Fermat ne arată că $2^6 \equiv 3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Cum $2n + 1 = 4043 \equiv -1 \pmod 6$ şi $n + 2 = 2023 \equiv 1 \pmod 6$, deducem că $S - n \equiv 3^5 + 2^1 \equiv 245 \equiv 0 \pmod 7$.
În concluzie, S_n este divizibil şi cu 5 şi cu 7, deci cu 35.

2. Fie n şi k două numere naturale, cu $n \geq 3$. Théo organizează alegerile pentru reprezentanţii clasei sale care are n elevi: fiecare elev trebuie să voteze pentru unul dintre colegii săi (toţi elevii din clasă pot fi votaţi) şi nimeni nu se poate vota pe sine însuşi. Apoi Théo împarte elevii în grupe astfel încât, dacă un elev se află într-una dintre grupe, elevul pe care acesta l-a votat se află într-o altă grupă.
Pentru ce valori ale lui k este Théo sigur că poate împărţi elevii în cel mult k grupe, indiferent de modul în care au votat elevii?

Soluţie:
Vom demonstra că sunt necesare 3 grupe, apoi că Théo se poate întotdeauna descurca să facă 3 grupe. Concluzia este că orice $k \geq 3$ satisface condiţiile problemei.
Dacă A, B şi C sunt trei dintre elevii clasei şi A îl votează pe B, B îl votează pe C şi C îl votează pe A, atunci elevii A, B şi C trebuie să facă parte din trei grupe diferite, deci sunt necesare (cel puţin) 3 grupe.
Vom demonstra prin inducţie după n, numărul elevilor, că elevii clasei pot fi împărţiţi în 3 grupe astfel încât nimeni să nu fie în aceeaşi grupă cu elevul pe care l-a votat, şi asta chiar şi dacă modificăm regulile votării şi permitem şi voturi nule (unii elevi nu votează pe nimeni).
Pentru $n = 3$ este clar că 3 grupe sunt suficiente: plasăm fiecare elev singur în câte o grupă.
Presupunem afirmaţia de mai sus adevărată pentru o clasă cu n elevi ($n \geq 3$). Să o demonstrăm pentru o clasă cu $n + 1$ elevi. Deoarece sunt $n + 1$ elevi care au primit în total cel mult $n + 1$ voturi, va exista un elev care a primit cel mult un vot. Alegem un asemenea elev, Ana. O scoatem, momentan, pe Ana din clasă.

Dacă există vreun elev care a votat-o pe Ana, îi anulăm votul. Fiecare din cei n elevi rămaşi, fie a votat un alt elev din cei n, fie a dat un vot nul (nu a votat pe nimeni). Din ipoteza de inducţie, aceşti n elevi pot fi împărţiţi în 3 grupe astfel încât în niciuna dintre grupe să nu existe doi elevi dintre care unul l-a votat pe celălalt. Acum o chemăm înapoi pe Ana. Sunt cel mult două grupe în care n-o putem pune pe Ana: cea care îl conţine pe elevul care a votat-o pe Ana (dacă există) şi cea care conţine elevul votat de Ana (dacă există). Oricum, rămâne (cel puţin) o grupă în care să o pună pe Ana.

3. Şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ este definit în felul următor: $a_1 = 63$ şi, pentru orice număr natural $n \geq 2$, a_n este cel mai mic multiplu al lui n care este mai mare sau egal ca a_{n-1}. Demonstraţi că termenii şirului sunt diferiţi doi câte doi.

Soluţia 1:
Este evident că $a_n \geq a_{n-1}$ pentru orice n, adică şirul este crescător. Rămâne să arătăm că este strict crescător.
Calculăm câţiva termeni: $a_2 = 64$, $a_3 = 66$, $a_4 = 68$, $a_5 = 70$, $a_6 = 72$, $a_8 = 80$, $a_9 = 81$, $a_{10} = 90$, $a_{11} = 99$, $a_{12} = 108$, $a_{13} = 117$.
Observăm că, pentru $n \geq 9$, pare să fie adevărat că $a_n = 9n$. Vem demonstra acest lucru prin inducţie. Pentru $n = 9$ am văzut deja că afirmaţia este adevărată. Apoi, dacă pentru un $n \geq 9$ avem $a_n = 9n$, atunci $8(n+1) < 9n$, deci $a_{n+1} = 9(n+1) \geq > 9n$. Inducţia este, astfel, încheiată. Examinând primii 9 termenise vede că şirul este strict crescător, deci are termenii diferiţi doi câte doi.

Soluţia 2:
Ca la soluţia 1, şirul este crescător. Pentru a arăta că $a_n \neq a_{n+1}$, trebuie să arătăm că nu se poate ca a_n să fie divizibil şi cu n, şi cu $n+1$, adică să fie divizibil cu $n(n+1)$. Verificăm acest lucru pentru $n \leq 9$. Apoi, arătăm prin inducţie că $a_n < n(n+1)$, $\forall\, n \geq 9$, de unde concluzia. Din $n+1$ numere consecutive, unul este divizibil cu $n+1$, deci $a_{n+1} < a_n + n < n(n+1) + n = n(n+2) < (n+1)(n+2)$.

4. Fie $P_1P_2 \ldots P_{2021}$ un poligon convex cu 2021 de laturi cu proprietatea că, pentru fiecare vârf P_i, cele 2018 diagonale care pleacă din P_i împart unghiul $\widehat{P_i}$ în 2019 unghiuri egale. Demonstraţi că $P_1P_2 \ldots P_{2021}$ este un poligon regulat, adică un poligon care are toate unghiurile de aceeaşi măsură şi toate laturile de aceeaşi lungime.
Soluţie:
Vom nota $n = 2019$ şi $a_i = \frac{1}{n} \cdot m(\sphericalangle P_i)$. Fie P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3} şi P_{k+4} cinci vârfuri consecutive, indicii fiind luaţi modulo $n+2$. Scriind suma măsurilor unghiurilor în triunghiurile $P_kP_{k+1}P_{k+2}$, $P_kP_{k+1}P_{k+3}$ şi $P_kP_{k+1}P_{k+4}$, obţinem relaţiile:

$$a_k + na_{k+1} + a_{k+2} = 180^\circ \qquad (1)$$
$$2a_k + (n-1)a_{k+1} + a_{k+3} = 180^\circ \qquad (2)$$
$$3a_k + (n-2)a_{k+1} + a_{k+4} = 180^\circ \qquad (3)$$

Scăzând ecuaţia (2) din ecuaţia (1) obţinem $a_{k+1} + a_{k+2} = a_k + a_{k+3}$, adică $a_{k+1} - a_k = a_{k+3} - a_{k+2}$.
Scăzând ecuaţia (3) din ecuaţia (2) obţinem $a_{k+1} + a_{k+3} = a_k + a_{k+4}$, adică $a_{k+1} - a_k = a_{k+4} - a_{k+3}$.
Deducem că $a_{k+4} - a_{k+3} = a_{k+3} - a_{k+2}$ pentru orice k, adică diferenţa dintre oricare două unghiuri consecutive a_j şi a_{j+1} este o constantă c. Atunci $a_{i+k} = a_i + kc$ pentru orice i şi k. În particular, $a_1 = a_{n+3} = a_1 + (n+2)c$, deci $c = 0$. Astfel, toate unghiurile poligonului nostru sunt egale.
Triunghiul $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ are unghiurile P_i şi P_{i+2} egale, deci este isoscel. Rezultă că $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$. Aşadar oricare două laturi succesive sunt egale, prin urmare toate laturile poligonului sunt egale. Conchidem că poligonul este regulat.
Variantă: Din (1) şi (2) deducem, ca mai sus, că $a_{k+1} - a_k = a_{k+3} - a_{k+2}$, de unde rezultă imediat că $a_{2j} - a_{2j-1} = c$ pentru orice j. Dar indicii sunt luaţi modulo $n+2$ care este impar, deci va rezulta că avem şi $a_{2s+1} - a_{2s} = c$ pentru orice s. De aici se continuă ca mai sus.

Alternativ se puteau folosi tehnici de şiruri recurente (de clasa a IX-a, care depăşesc programa olimpiadelor de juniori):
relaţia (1) este o recurenţă liniară neomogenă. Orice şir care o verifică este suma dintre un şir care verifică recurenţa omogenă $b_k + nb_{k+1} + b_{k+2} = 0$ şi un şir particular care verifică recurenţa neomogenă (1). Pentru a rezolva recurenţa omogenă, asociem acesteia ecuaţia de gradul II $1 + nt + t^2 = 0$, cu soluţiile $t_{1,2} = \dfrac{-n \pm \sqrt{n^2-4}}{2}$.
Atunci $b_k = c_1t_1^k + c_2t_2^k$, unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sunt arbitrare. O soluţie particulară a recurenţei neomogene este şirul constant $\dfrac{180}{n+2}$, astfel că $a_k = c_1t_1^n + c_2t_2^n + \dfrac{180}{n+2}$.
Ştim că şirul nostru trebuie să fie periodic de perioadă $n+1$, deci mărginit. Cum $t_1 = \dfrac{-n - \sqrt{n^2-4}}{2} < -1$, pentru ca şirul să fie mărginit trebuie ca $c_1 = 0$. Dar şirul $a_k = c_2t_2^k + \dfrac{180}{n+2}$ este periodic numai dacă $c_2 = 0$. Deducem că $a_k = \dfrac{180}{n+2}$, deci toate unghiurile sunt egale. Apoi, ca mai sus, se arată că şi laturile sunt egale, deci că poligonul este regulat.