BARAJ JUNIORI NR. 4, FRANŢA 2020
6 mai 2020

1. Fie x şi y două numere reale. Notăm

$$M = \max\{xy + 1,\ xy - x - y + 3,\ -2xy + x + y + 2\}.$$

Demonstraţi că $M \geq 2$ şi determinaţi cazurile de egalitate.

2. În tren, când se întorc de la EGMOnd an Zee, Clara şi Edwige joacă următorul joc. Iniţial, numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 20$ este scris pe o foaie de hârtie. Apoi, începând cu Clara, fiecare fată, atunci când e la rând, înlocuieşte numărul n printr-unul din numerele $\dfrac{kn}{10}$, unde k este un număr natural cuprins între 1 şi 9 inclusiv.
Prima jucătoare care scrie un număr neîntreg pierde, iar adversara ei câştigă. Clara şi Edwige sunt două jucătoare redutabile, prin urmare ele joacă de o manieră optimală. Care dintre ele va câştiga?

3. Determinaţi toate numerele naturale x, y şi z pentru care

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

4. Fie ABC un triunghi şi Γ un cerc care trece prin punctul A. Presupunem că Γ intersectează din nou segmentele $[AB]$ şi $[AC]$ în două puncte, pe care le numim D, respectiv E şi că Γ taie segmentul $[BC]$ în două puncte, pe care le numim F şi G, astfel ca F să se afle între B şi G. Fie T punctul de intersecţie dintre tangenta în F la cercul circumscris lui BDF şi tangenta în G la cercul circumscris lui CEG. Demonstraţi că, dacă punctele A şi T sunt distincte, atunci dreptele AT şi BC sunt paralele.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii oficiale:

1. Fie x şi y două numere reale. Notăm

$$M = \max\{xy + 1,\ xy - x - y + 3,\ -2xy + x + y + 2\}.$$

Demonstraţi că $M \geq 2$ şi determinaţi cazurile de egalitate.

Soluţie: Avem $M \geq xy + 1$, $M \geq xy - x - y + 3$ şi $M \geq -2xy + x + y + 2$ care, adunate, conduc la $3M \geq 6$, deci la $M \geq 2$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă toate cele trei inegalităţi de mai sus sunt satisfăcute cu egalitate, adică dacă $xy+1 = 2$, $xy-x-y+3 = 2$ şi $-2xy+x+y+2 = 0$.
Relaţia a doua se scrie $(x-1)(y-1) = 0$, adică $x = 1$ sau $y = 1$. Prima relaţie implică în ambele cazuri $x = y = 1$.
Reciproc, pentru $x = y = 1$ avem într-adevăr $M = 2$, fiecare din cele trei numere fiind egal cu 2.

2. În tren, când se întorc de la EGMOnd an Zee, Clara şi Edwige joacă următorul joc. Iniţial, numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 20$ este scris pe o foaie de hârtie. Apoi, începând cu Clara, fiecare fată, atunci când e la rând, înlocuieşte numărul n printr-unul din numerele $\frac{kn}{10}$, unde k este un număr natural cuprins între 1 şi 9 inclusiv.
Prima jucătoare care scrie un număr neîntreg pierde, iar adversara ei câştigă.
Clara şi Edwige sunt două jucătoare redutabile, prin urmare ele joacă de o manieră optimală. Care dintre ele va câştiga?

Soluţia 1: Ne vom ocupa de numărul n scris pe foaie în momentul în care jucătoarea X se pregăteşte să mute, şi asta înainte ca jocul să se termine.
Descompunem (parţial) numărul n ca produs de factor primi: $n = 2^x \cdot 5^y \cdot m$, unde x şi y sunt numere naturale, iar m este un număr natural nenul, prim cu 2 şi cu 5.
Vom demonstra prin inducţie după n proprietatea $P(n)$: jucătoarea X va pierde dacă şi numai dacă x şi y sunt ambele pare şi va câştiga în caz contrar.
Pentru început, să observăm că $P(1)$ este evidentă deoarece X va trebui să înlocuiască numărul $n = 1$ cu un număr cuprins între $\frac{1}{10}$ şi $\frac{9}{10}$, deci neîntreg.
Fie acum $n \geq 1$ un număr natural arbitrar. Presupunem adevărate afirmaţiile $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(n)$ şi demonstrăm că şi $P(n+1)$ este adevărată.
• Dacă x şi/sau y este impar, notăm cu r şi s resturile lui x şi y modulo 2. Atunci jucătoarea X înlocuieşte numărul n cu numărul $n' = \frac{n}{2^r \cdot 5^s}$. Deoarece $n' = 2^{x-r} \cdot 5^{y-s} \cdot m$, proprietatea $P(n')$ garantează că adversara lui X va pierde.
• Dacă x şi y sunt pare, presupunem că X înlocuieşte numărul n printr-un număr n' (ea poate face acest lucru numai dacă $x \geq 1$ şi $y \geq 1$). Dacă X înlocuieşte numărul n cu numărul $n' = \frac{n}{2} = 2^{x-1} \cdot 5^y \cdot m$, atunci $P(n')$ arată că adversara

lui X va câştiga. Dacă X alege să facă o altă mutare, putem scrie numărul n' sub forma $n' = 2^{x'} \cdot 5^{y-1} \cdot m'$ (cu m' prim cu 2 şi cu 5): oricare ar fi valorile lui x' şi m', proprietatea $P(n')$ arată că adversara lui X va pierde.
Avem de stabilit soarta jocului pentru $n = 20!$. Se constată uşor că $20! = 2^{18} \cdot 5^4 \cdot m$, unde $m = 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Deoarece Clara mută prima, Edwige va fi cea care va câştiga.

Soluţia 2: Vom furniza din nou o strategie câştigătoare pentru Edwige, uşor diferită de cea de mai sus. Această strategie este foarte simplă (chiar dacă a demonstra că ea funcţionează nu este la fel de simplu): dacă Clara tocmai a transformat numărul n într-un nou număr, $n' = \dfrac{kn}{10}$, atunci Edwige transformă n' în $n'' = \dfrac{kn'}{10}$.
Pentru a demonstra că această strategie îi permite lui Edwige să câştige, deoarece partida poate dura cel mult $20! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 20$ de mutări, este suficient să demonstrăm că n'' este mereu un număr întreg. Astfel, Edwige, având mereu mutare, nu poate pierde, deci ea va câştiga.
Mai întâi constatăm că numărul natural $20!$ este egal cu $u^2 \cdot v$, unde am notat $u = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, iar $v = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Vom arăta că, dacă Edwige aplică strategia de mai sus, atunci fiecare număr pe care ea îl lasă Clarei va fi de forma $n = \hat{u}^2 \cdot v$, unde $\hat{u}$ este un număr natural, iar $v = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. La începutul jucului, lucrurile stau deja aşa. Apoi, dacă Clara transformă un număr $n = \hat{u}^2 \cdot v$ într-un alt număr, $n' = \dfrac{kn}{10}$, Edwige va transforma n' în numărul $n'' = \dfrac{kn'}{10} = \left(\dfrac{k\hat{u}}{10}\right)^2 \cdot v$. Trebuie, daci, să demonstrăm că numărul $\dfrac{k\hat{u}}{10}$ este întreg, adică 2 şi 5 îl divid, ambele, pe $k\hat{u}$.
Cum n' este un număr natural, iar $10n' = kn = k\hat{u}^2v$, ştim că 2 şi 5 îl divid, ambele, pe $k\hat{u}^2v$. Ori 2 nu îl divide pe v, deci divide k sau $\hat{u}$, deci divide şi $k\hat{u}$. La fel, 5 nu îl divide pe v, deci divide k sau $\hat{u}$, deci divide şi $k\hat{u}$.
Aceasta încheie demonstraţia noastră.

3. Determinaţi toate numerele naturale x, y şi z pentru care

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

Soluţie:
Începem prin a descompune fiecare termen în produs de factori primi. Ecuaţia devine atunci

$$3^{2x} \cdot 5^x - 3^y \cdot 2^y = 3^z \cdot 673^z.$$

Vom trata acum diversele cazuri:
• Dacă $y > 2x$, atunci $3^z \cdot 673^z = 3^{2x}(5^x - 3^{y-2x} \cdot 2^y)$. Teorema lui Gauss indică

atunci că 3^z divide 3^{2x} (căci $5^x - 3^{y-2x} \cdot 2^y$ nu este divizibil cu 3, deci este prim cu 3^z) şi că 3^{2x} divide 3^z (căci 673^z nu este divizibil cu 3, deci este prim cu 3^{2x}). Deducem de aici că $z = 2x$, iar ecuaţia devine $673^{2x} = 5^x - 3^{y-2x} \cdot 2^y$. Dar, cum $673^{2x} > 5^x$, această ecuaţie nu are soluţii, deci acest caz este imposibil.
• Dacă $y = 2x$, atunci $3^z \cdot 673^z = 3^{2x}(5^x - 2^y)$. Ca mai sus, teorema lui Gauss arată că 3^{2x} divide 3^z. Deducem că $2x \leq z$ şi ecuaţia devine $3^{z-2x} \cdot 673^z = 5^x - 2^y$. Dar, cum $673^z \geq 5^z \geq 5^x$, această ecuaţie nu are soluţie, deci acest caz este imposibil.
• Dacă $y < 2x$, atunci $3^z \cdot 673^z = 3^y(3^{2x-y} \cdot 5^x - 2^y)$. O dată în plus, cum nici 673^z şi nici $3^{2x-y} \cdot 5^x - 2^y$ nu sunt divizibile cu 3, teorema lui Gauss arată că 3^z şi 3^y se divid reciproc. Deducem că $z = y$, iar ecuaţia devine $673^y = 3^{2x-y} \cdot 5^x - 2^y$.
Distingem atunci mai multe subcazuri:
− Dacă $y = 0$, ecuaţia devine $2 = 3^{2x} \cdot 5^x$ care, desigur, nu are soluţii.
− Dacă $y = 1$, ecuaţia devine $675 = 3^{2x-1} \cdot 5^x$. Cum $675 = 33 \cdot 5^2$, deducem existenţa soluţiei $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.
− Dacă $y \geq 2$, considerăm ecuaţia noastră modulo 4: ea devine $1 \equiv 3^y \pmod 4$, ceea ce arată că y este par.
Apoi, deoarece avem în mod necesar $x \geq 1$, considerând ecuaţia modulo 5, aceasta devine $(-2)^y \equiv -2^y \pmod 5$, ceea ce arată că y este impar. Aşadar, ecuaţia nu admite nicio soluţie în acest subcaz.
n'admet donc aucune solution dans ce sous-cas. Unica soluţie a ecuaţiei este deci tripletul $(2, 1, 1)$.

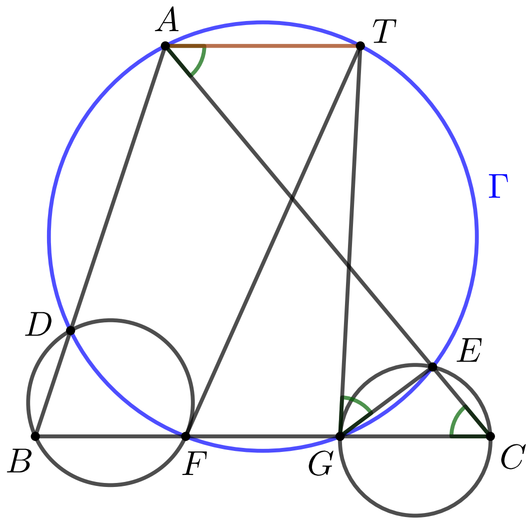
Soluţia alternativă nr. 1: Putem trata împreună cazurile $y > 2x$ şi $y = 2x$ reluând argumentele menţionate mai sus într-o ordine uşor diferită.
Mai întâi, cum $2019^z < 45^x \leq 2019^x$, deducem că $z < x$. În plus, dacă vreunul din numerele $2x$, y şi z este strict mai mic decât celelalte două (îl vom nota pe acesta t), atunci numărul $3^{2x} \cdot 5^x - 3^y \cdot 2^y - 3^z \cdot 673^z$ nu este divizibil cu 3^{t+1}, ceea ce este imposibil fiindcă ar trebui să fie egal cu 0. Deoarece ştim deja că $z < xleq2x$, deducem că $y = z$, deci că $y = z < x$.

Soluţia alternativă nr. 2: Vom lucra direct pornind de la ecuaţia $45^x - 6^y = 2019^z$. Mai întâi, deoarece $45^x > 2019^z$, ştim că $x \geq 1$. Considerată modulo 5, ecuaţia se rescrie $-1 \equiv -1^y \equiv (-1)^z \pmod 5$. Rezultă că z este impar. Apoi, considerând ecuaţia modulo 4, cum z este impar, aceasta se rescrie $1 - 2^y \equiv 45^x - 6^y \equiv 2019^z \equiv (-1)^z \equiv -1 \pmod 4$. Rezultă de aici că $y = 1$.
În fine, cum $x \geq 1$, considerând ecuaţia modulo 9, acesta se rescrie $3 \equiv 45^x - 6^y \equiv 3^z \pmod 9$. Deducem că $z = 1$.
Ecuaţia devine atunci $45^x = 6^y + 2019^z = 2025 = 45^2$, iar tripletul $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ.
În concluzie, unica soluţie este tripletul $(2, 1, 1)$.

4. Fie ABC un triunghi şi Γ un cerc care trece prin punctul A. Presupunem că Γ intersectează din nou segmentele $[AB]$ şi $[AC]$ în două puncte, pe care le numim

D, respectiv E şi că Γ taie segmentul $[BC]$ în două puncte, pe care le numim F şi G, astfel ca F să se afle între B şi G. Fie T punctul de intersecţie dintre tangenta în F la cercul circumscris lui BDF şi tangenta în G la cercul circumscris lui CEG. Demonstraţi că, dacă punctele A şi T sunt distincte, atunci dreptele AT şi BC sunt paralele.

Soluţie: Începem prin a face o figură.



O primă remarcă frapantă este că T pare să fie situat pe cercul Γ. După ce ne-am convins şi pe o a doua figură că într-adevăr aşa este, ne grăbim să demonstrăm acest prim rezultat. În acest scop pornim la vânătoare de unghiuri, folosind conciclicitatea şi teorema unghiului la centru în cazul limită al tangentei. Avem:
$m(\sphericalangle FTG) = 180^\circ - m(\sphericalangle TGF) - m(\sphericalangle TFG) = 180^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{CG}) - \frac{1}{2}m(\widehat{FB}) = 180^\circ - m(\sphericalangle CEG) - m(\sphericalangle FDB) = 180^\circ - m(\sphericalangle ADG) - m(\sphericalangle FDB) = m(\sphericalangle GDF)$, ceea ce arată că punctul T se găseşte pe cercul Γ.
Considerăm numai cazul în care oridinea punctelor pe cercul Γ este A, F, G, T. Cazul în care ordinea este A, T, F, G este analog.
Avem $\sphericalangle TAE \equiv \sphericalangle TGE \equiv \sphericalangle GCE$, deci $TA \parallel BC$.