

BARAJ JUNIORI NR. 4, FRANȚA 2020
6 mai 2020

1. Fie x și y două numere reale. Notăm

$$M = \max\{xy + 1, xy - x - y + 3, -2xy + x + y + 2\}.$$

Demonstrați că $M \geq 2$ și determinați cazurile de egalitate.

2. În tren, când se întorc de la EGMOnd an Zee, Clara și Edwige joacă următorul joc. Inițial, numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 20$ este scris pe o foaie de hârtie. Apoi, începând cu Clara, fiecare fată, atunci când e la rând, înlocuiește numărul n printr-unul din numerele $\frac{kn}{10}$, unde k este un număr natural cuprins între 1 și 9 inclusiv.

Prima jucătoare care scrie un număr neîntreg pierde, iar adversara ei câștigă. Clara și Edwige sunt două jucătoare redutabile, prin urmare ele joacă de o manieră optimală. Care dintre ele va câștiga?

3. Determinați toate numerele naturale x , y și z pentru care

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

4. Fie ABC un triunghi și Γ un cerc care trece prin punctul A . Presupunem că Γ intersectează din nou segmentele $[AB]$ și $[AC]$ în două puncte, pe care le numim D , respectiv E și că Γ taie segmentul $[BC]$ în două puncte, pe care le numim F și G , astfel ca F să se afluie între B și G . Fie T punctul de intersecție dintre tangenta în F la cercul circumscris lui BDF și tangenta în G la cercul circumscris lui CEG . Demonstrați că, dacă punctele A și T sunt distincte, atunci dreptele AT și BC sunt paralele.

Timp de lucru: 4 ore