BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANŢA 2020
1 aprilie 2020

1. Fie $a_1, a_2, \ldots$ şirul de numere naturale definit prin $a_1 = 1$ şi, pentru orice număr natural $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1.$$

Demonstraţi, pentru orice număr natural $n \geq 1$, că $a_n^2 + 1$ divide $a_{n+1}^2 + 1$.

2. Numerele 1, 2, …, 8 sunt distribuite în două mulţimi, A şi B, apoi se notează cu P_A produsul tuturor elementelor lui A şi cu P_B produsul tuturor elementelor lui B. Care sunt valorile minimă şi maximă pe care le poate lua suma $P_A + P_B$?
Notă: dacă o mulţime este vidă, considerăm că produsul elementelor sale este 1.

3. Fie ABC un triunghi şi fie ω cercul său circumscris. Fie ℓ_B şi ℓ_C două drepte paralele care trec prin punctele B, respectiv C. Notăm cu D punctul de intersecţie, diferit de B, dintre ω şi dreapta ℓ_B. Similar, notăm cu E punctul de intersecţie, diferit de C, dintre ω şi dreapta ℓ_C. Presupunem că dreptele ℓ_C şi AD se intersectează într-un punct F şi că dreptele ℓ_B şi AE se intersectează într-un punct G. Notăm atunci cu O, O_1 şi O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, ADG, respectiv AEF. În fine, notăm cu P centrul cercului circumscris triunghiului OO_1O_2.
Demonstraţi că dreapta OP este paralelă cu dreptele ℓ_B şi ℓ_C.

4. În Ţara Minunilor sunt n oraşe. Oricare două oraşe sunt legate printr-un drum cu sens unic care porneşte dintr-unul din cele două oraşe şi ajunge la celălalt. Pentru a se putea deplasa, Alice îi pune întrebări Regelui de Cupă: la fiecare întrebare, Alice alege o pereche de oraşe, iar Regele de Cupă îi spune care este oraşul de pornire pentru drumul care leagă cele două oraşe.
Demonstraţi că, din cel mult $5n$ întrebări, Alice poate să ajungă să afle dacă există vreun oraş din care să plece cel mult un drum.

Timp de lucru: 4 ore