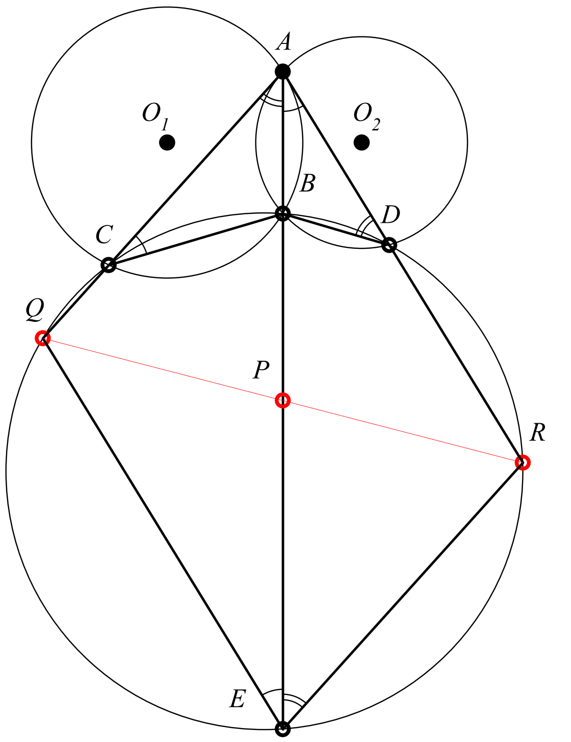
BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2020
20 februarie 2020

1. Fie A, B, E şi P patru puncte, distincte două câte două, astfel încât P să fie mijlocul segmentului $[AE]$, iar B să aparţină segmentului $[AP]$. Fie ω_1 şi ω_2 două cercuri care trec prin A şi B. Notăm cu t_1 şi t_2 tangentele din A la ω_1, respectiv ω_2. Fie C punctul de intersecţie, diferit de A, dintre t_2 şi ω_1 şi fie Q punctul de intersecţie, diferit de C, dintre t_2 şi cercul circumscris triunghiului BCE. Analog, fie D punctul de intersecţie, diferit de A, dintre t_1 şi ω_2, şi fie R punctul de intersecţie, diferit de D, dintre t_1 şi cercul circumscris triunghiului BDE.
Demonstraţi că punctele P, Q şi R sunt coliniare.



SOLUŢIE (*Mihai Micliţa*): Avem (v.Fig.):

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} AR\cap(O_1)=\{A\}\Rightarrow \widehat{DAB}\equiv \underline{\widehat{ACB}} \\ EBCQ-inscriptibil\Rightarrow \underline{\widehat{ACB}}\equiv \widehat{QEA} \end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DAB}\equiv\widehat{QEA}\Leftrightarrow AR\parallel EQ \\
\left.\begin{array}{r} AQ\cap(O_2)=\{A\}\Rightarrow \widehat{CAB}\equiv \underline{\underline{\widehat{BDA}}} \\ DBER-inscriptibil\Rightarrow \underline{\underline{\widehat{BDA}}}\equiv \widehat{AER} \end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{CAB}\equiv\widehat{AER}\Leftrightarrow AQ\parallel ER
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AQER-paralelogram \\ [PA]\equiv[PE];\, P\in[AE]\end{array}\right\}\Rightarrow P\in[QR].\blacksquare$$

Soluţia oficială foloseşte unghiuri orientate. Are avantajul că nu mai este nevoie să studiem cazuri, în funcţie de ordinea punctelor A, D, R de pildă. Însă oricum, toate aceste cazuri sunt analoage.

2. a) Determinaţi cel mai mic număr natural $k \geq 1$ care are următoarea proprietate: pentru orice numere naturale nenule x şi y astfel x divide y^2 şi y divide x^2, produsul xy divide $(x+y)^k$.
b) Determinaţi cel mai mic număr natural $\ell \geq 1$ care are următoarea proprietate: pentru orice numere naturale nenule x, y şi z astfel x divide y^2, y divide z^2 şi z divide x^2, produsul xyz divide $(x+y+z)^\ell$.

Soluţie:
Să observăm de la început că dacă numărul k are proprietatea dorită, atunci orice număr natural $k' > k$ va avea şi el respectiva proprietate. Într-adevăr, dacă xy divide $(x+y)^k$, atunci xy divide şi $(x+y)^{k'}$, oricare ar fi $k' > k$. Prin urmare, ne este suficient să găsim un număr natural k care are proprietatea dorită, dar pentru care $k-1$ nu are această proprietate. Acest demers funcţionează şi la punctul b).

a) Pentru $k = 1$ este uşor de găsit un contraexemplu, de exemplu unul cu $x = y$. Putem alege $x = y = 3$.
Pentru $k = 2$ nu mai sunt contraexemple cu $x = y$, dar putem găsi $x = 3$, $y = 9$ sau $x = 4$, $y = 8$.
Pentru $k = 3$ nu mai găsim contraexemple, aşa încât bănuim că pentru $k = 3$ proprietatea are loc. Dacă notăm $a = \dfrac{y^2}{x}$ şi $b = \dfrac{x^2}{y}$, ştim că $a, b \in \mathbb{N}$. Din $ax = y^2$ şi $by = x^2$ rezultă $ab = xy$. Atunci $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = bxy + axy + 3xy(x+y)$ este evident divizibil cu xy. Aşadar, cel mai mic k care are proprietatea din enunţ este $k = 3$.

b) Pentru valori mici ale lui ℓ căutăm contraexemple cu $x = p^4$, $y = p^2$, $z = p$, unde p este un număr prim. Aceste numere satisfac condiţiile x divide y^2, y divide z^2 şi z divide x^2, deci este necesar la produsul lor, p^7 să dividă $(p^4+p^2+p)^\ell = p^\ell(p^3+p+1)^\ell$. Cum numărul din paranteză nu este divizibil cu p, este necesar ca $\ell \geq 7$.
Rămâne să demonstrăm că dacă $a = \dfrac{y^2}{x}$, $b = \dfrac{z^2}{y}$ şi $c = \dfrac{x^2}{z}$ sunt numere naturale, atunci xyz divide $(x+y+z)^7$. Să observăm că $y^2 = ax$, $z^2 = by$, $x^2 = cz$ implică $xyz = abc$. Dacă ne-am pune să desfacem parantezele la $(x+y+z)^7$ am obţine o mulţime de termeni (3^7) de forma $x^u y^v z^w$, unde $u, v, w \in \mathbb{N}$, $u + v + w = 7$. Evident, xyz divide fiecare termen în care $u, v, w \geq 1$. Să demonstrăm că xyz divide $x^u y^{7-u}$ oricare ar fi $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$. Pentru $u \in \{3, 4, 5, 6\}$ avem $xz \mid x^3$ şi $y \mid y^{7-a}$. Pentru $u = 0$ avem $x \mid y^2$ şi $z \mid x^2$ implică $z \mid y^4$, deci $xyz \mid y^7$. Pentru $u = 1$ şi $u = 2$ procedăm la fel obţinând $z \mid y^4$, deci $xyz \mid xy^5$. Pentru $u = 7$ se procedează ca la $u = 0$.
În concluzie, cel mai mic ℓ cu proprietatea din enunţ este $\ell = 7$.

3. O clasă are n elevi. Oricum am alege doi elevi, există cel puţin unul care a fost invitat la prânz de către celălalt. Dispunem, în plus, de informaţia următoare:

pentru orice elev E, exact jumătate din elevii care l-au invitat pe E la prânz au fost, la rândul lor, invitaţi de către E la prânz.
Determinaţi toate valorile posibile ale lui n.

Soluţie:
Fie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ elevii noştri. Notăm cu a_k numărul elevilor la care E_k a prânzit şi cu b_k numărul elevilor care au prânzit deja la E_k. Enunţul ne spune că aceşti b_k elevi sunt, pe de-o parte, cei $n-1-a_k$ elevi la care E_k nu a prânzit şi, pe de altă parte, $\frac{a_k}{2}$ elevi la care E_k a prânzit, astfel că $b_k = n-1-\frac{a_k}{2}$.
Vom număra acum în două moduri numărul total de prânzuri servite la altcineva acasă, P. Pe de o parte este suma ocaziilor în care un elev a prânzit la un coleg, adică $P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Pe de altă parte, P este totodată suma numărului de ocazii în care un elev a invitat un coleg la prânz, astfel că $P = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Deducem că

$$P = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(n-1-\frac{a_k}{2}\right) = n(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k = n(n-1) - \frac{P}{2},$$

de unde $3P = 2n(n-1)$, deci 3 divide n sau 3 divide $n-1$. Vom trata separat aceste două cazuri.
• Dacă 3 divide $n-1$, fie $\ell = \frac{n-1}{3}$. În continuare vom identifica elevii cu numerele $0, 1, \ldots, n-1$ considerate modulo n: elevul 0 coincide cu elevul n, elevul 1 cu elevul $n+1$, etc. O manieră de a obţine situaţia descrisă în enunţ este ca fiecare elev k să prânzească la elevii $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $k+2\ell$ (adică la 2ℓ elevi) şi să primească la prânz elevii $k-2\ell$, $\ldots$, $k-1$. Într-adevăr, cum $-2\ell \equiv \ell + 1 \pmod{n}$, elevii care l-au invitat pe k la prânz sunt elevii $k+\ell+1$, $\ldots$, $k+2\ell$ (adică ℓ elevi).

• Dacă 3 divide n, notăm $\ell = \frac{n}{3}$. De această dată identificăm elevii nu numerele $0, 1, \ldots, n-2$ considerate modulo $n-1$, plus un elev special pe care îl vom nota cu X. Convenim că X invită pe toată lumea la prânz dar nu merge la prânz la nimeni, în timp ce oricare alt elev, k, va merge la prânz la $k+1$, $\ldots$, $k+2\ell-1$ şi X (adică la 2ℓ elevi) şi va primi la prânz elevii $k-2\ell+1$, $\ldots$, $k-1$. De astă dată, cum $-2\ell+1 \equiv \ell \pmod{n-1}$, elevii care l-au invitat pe k la prânz şi au şi prânzit la el sunt elevii $k+\ell$, $\ldots$, $k+2\ell-1$ (adică ℓ elevi).

În concluzie, valorile posibile ale lui n sunt toate cele pentru care $n \not\equiv 2 \pmod{3}$.

4. Fie a, b şi c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=3$. Demonstraţi că

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} + 8(ab+bc+ca) \geq 27$$

şi găsiţi cazul de egalitate.

Soluţie:
Fie $S = a^{12} + b^{12} + c^{12} + 8(ab + bc + ca) - 27$. Vrem să demonstrăm că $S \geq 0$. Mai întâi, cum $a + b + c = 3$, deducem că

$$S = (a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 4\big((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\big) - 27 =$$

$$(a^{12} + b^{12} + c^{12}) - 4(a^2 + b^2 + c^2) + 9 = f(a) + f(b) + f(c),$$

unde am notat cu $f(t) = t^{12} - 4t^2 + 3$.
Conform inegalităţii mediilor, avem pentru orice $t \geq 0$,
$t^{12} + 3 = t^{12} + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{t^{12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4t^3$, deci $f(t) \geq 4(t^3 - t^2)$.
Dar tripletele (a, b, c) şi (a^2, b^2, c^2) sunt la fel ordonate, deci, potrivit inegalităţii lui Cebâşev,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{3} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Deducem că

$$S \geq 4(a^3 + b^3 + c^3) - 4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0,$$

de unde concluzia.
Egalitatea are loc dacă $a = b = c = 1$.

Remarci: Ca mai sus, folosind inegalitatea lui Cebâşev, se arată că dacă $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$, atunci $a^{k+1} + b^{k+1} + c^{k+1} \geq a^k + b^k + c^k$, $\forall$, $k \geq 0$. Astfel, cu cât k este mai mic, cu atât inegalitatea $a^{k+1} + b^{k+1} + c^{k+1} + 8(ab + bc + ca) \geq 27$ este mai tare. Pentru $k = 2$, inegalitatea $a^3 + b^3 + c^3 + 8(ab + bc + ca) \geq 27$ este falsă (alegeţi $a = b = 1,4$, $c = 0,2$). Pentru $k = 3$ inegalitatea $a^4 + b^4 + c^4 + 8(ab + bc + ca) \geq 27$ este adevărată (dar acest lucru nu se arată simplu).

Remarcă: (*Marius Valentin Drăgoi*)
Inegalitatea $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$ se poate stabili şi astfel: avem $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 9$, deci $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, apoi $3(a^3 + b^3 + c^3) = (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.