BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2020
20 februarie 2020

1. Fie A, B, E şi P patru puncte, distincte două câte două, astfel încât P să fie mijlocul segmentului $[AE]$, iar B să aparţină segmentului $[AP]$. Fie ω_1 şi ω_2 două cercuri care trec prin A şi B. Notăm cu t_1 şi t_2 tangentele din A la ω_1, respectiv ω_2. Fie C punctul de intersecţie, diferit de A, dintre t_2 şi ω_1 şi fie Q punctul de intersecţie, diferit de C, dintre t_2 şi cercul circumscris triunghiului BCE. Analog, fie D punctul de intersecţie, diferit de A, dintre t_1 şi ω_2, şi fie R punctul de intersecţie, diferit de D, dintre t_1 şi cercul circumscris triunghiului BDE.
Demonstraţi că punctele P, Q şi R sunt coliniare.

2. a) Determinaţi cel mai mic număr natural $k \geq 1$ care are următoarea proprietate: pentru orice numere naturale nenule x şi y astfel x divide y^2 şi y divide x^2, produsul xy divide $(x+y)^k$.
b) Determinaţi cel mai mic număr natural $\ell \geq 1$ care are următoarea proprietate: pentru orice numere naturale nenule x, y şi z astfel x divide y^2, y divide z^2 şi z divide x^2, produsul xyz divide $(x+y+z)^\ell$.

3. O clasă are n elevi. Oricum am alege doi elevi, există cel puţin unul care a fost invitat la prânz de către celălalt. Dispunem, în plus, de informaţia următoare: pentru orice elev E, exact jumătate din elevii care l-au initat pe E la prânz au fost, la rândul lor, invitaţi de către E la prânz.
Determinaţi toate valorile posibile ale lui n.

4. Fie a, b şi c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=3$. Demonstraţi că

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+8(ab+bc+ca) \geq 27$$

şi găsiţi cazul de egalitate.

Timp de lucru: 4 ore