BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2020
8 ianuarie 2020

1. Clara şi Isabelle joacă următorul joc. La începutul jocului, ele aleg un număr natural $n \geq 1$, apoi pun n bomboane într-o bombonieră. Apoi ele mută alternativ, începând cu Clara. La fiecare mutare, dacă în bombonieră sunt k bomboane, jucătoarea aflată la mutare alege un număr ℓ, prim cu k, astfel încât $\ell \leq k$, apoi ea mănâncă ℓ bomboane din bombonieră. Urmează la rând cealaltă jucătoare. Jucătoarea care mănâncă ultima bomboană câştigă partida. Pentru ce valori ale lui n dispune Clara de o strategie câştigătoare?

2. Fie ABC un triunghi şi fie Γ cercul său circumscris. Fie P punctul de intersecţie a dreptei BC cu tangenta în A la Γ. Fie D şi respectiv E simetricele punctelor B şi A faţă de P. Fie apoi ω_1 cercul circumscris triunghiului DAC şi fie ω_2 cercul circumscris triunghiului APB. Notăm cu F al doilea punct de intersecţie a cercurilor ω_1 şi ω_2 ($F \neq A$), apoi notăm cu G al doilea punct de intersecţie a cercului ω_1 cu dreapta BF ($G \neq F$)
Demonstraţi că dreptele BC şi EG sunt paralele.

3. Fie n un număr natural nenul. Spunem despre o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ că este n-pozitivă dacă, pentru orice numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu proprietatea că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ are loc relaţia $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq 0$.
a) Este adevărat că orice funcţie 2020-pozitivă este şi 1010-pozitivă?
b) Este adevărat că orice funcţie 1010-pozitivă este şi 2020-pozitivă?

4. Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ un şir de numere naturale nenule şi fie $b_0, b_1, b_2, \ldots$ şirul definit prin $b_n = c.m.m.d.c(a_n, a_{n+1})$ pentru orice număr natural $n \geq 0$. Este posibil ca orice număr natural nenul să fie egal cu exact unul dintre termenii şirului $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Timp de lucru: 4 ore