BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2020
8 ianuarie 2020

1. Clara şi Isabelle joacă următorul joc. La începutul jocului, ele aleg un număr natural $n \geq 1$, apoi pun n bomboane într-o bombonieră. Apoi ele mută alternativ, începând cu Clara. La fiecare mutare, dacă în bombonieră sunt k bomboane, jucătoarea aflată la mutare alege un număr ℓ, prim cu k, astfel încât $\ell \leq k$, apoi ea mănâncă ℓ bomboane din bombonieră. Urmează la rând cealaltă jucătoare. Jucătoarea care mănâncă ultima bomboană câştigă partida. Pentru ce valori ale lui n dispune Clara de o strategie câştigătoare?

2. Fie ABC un triunghi şi fie Γ cercul său circumscris. Fie P punctul de intersecţie a dreptei BC cu tangenta în A la Γ. Fie D şi respectiv E simetricele punctelor B şi A faţă de P. Fie apoi ω_1 cercul circumscris triunghiului DAC şi fie ω_2 cercul circumscris triunghiului APB. Notăm cu F al doilea punct de intersecţie a cercurilor ω_1 şi ω_2 ($F \neq A$), apoi notăm cu G al doilea punct de intersecţie a cercului ω_1 cu dreapta BF ($G \neq F$) Demonstraţi că dreptele BC şi EG sunt paralele.

3. Fie n un număr natural nenul. Spunem despre o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ că este n-pozitivă dacă, pentru orice numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu proprietatea că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, are loc relaţia $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq 0$.
a) Este adevărat că orice funcţie 2020-pozitivă este şi 1010-pozitivă?
b) Este adevărat că orice funcţie 1010-pozitivă este şi 2020-pozitivă?

4. Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ un şir de numere naturale nenule şi fie $b_0, b_1, b_2, \ldots$ şirul definit prin $b_n = c.m.m.d.c(a_n, a_{n+1})$ pentru orice număr natural $n \geq 0$. Este posibil ca orice număr natural nenul să fie egal cu exact unul dintre termenii şirului $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Timp de lucru: 4 ore

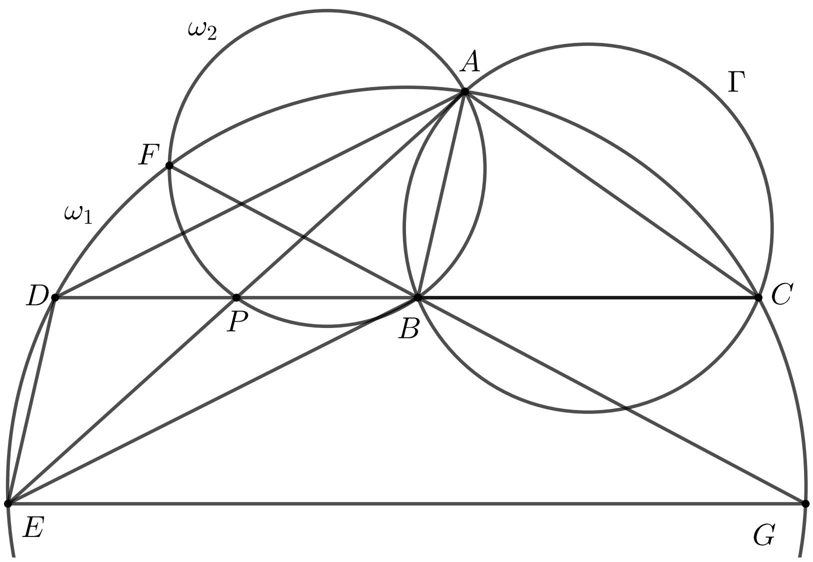
Soluţii oficiale:

1. Clara şi Isabelle joacă următorul joc. La începutul jocului, ele aleg un număr natural $n \geq 1$, apoi pun n bomboane într-o bombonieră. Apoi ele mută alternativ, începând cu Clara. La fiecare mutare, dacă în bombonieră sunt k bomboane, jucătoarea aflată la mutare alege un număr ℓ, prim cu k, astfel încât $\ell \leq k$, apoi ea mănâncă ℓ bomboane din bombonieră. Urmează la rând cealaltă jucătoare. Jucătoarea care mănâncă ultima bomboană câştigă partida. Pentru ce valori ale lui n dispune Clara de o strategie câştigătoare?

Soluţie: Mai întâi, dacă n este impar, Clara poate începe prin a alege $\ell = n - 2$. Într-adevăr, cum n este impar, se ştie că $c.m.m.d.c.(n, n-2) = c.m.m.d.c.(n, 2) = 1$. Dar atunci Isabelle se regăseşte cu două bomboane, deci este obligată să mănânce unul singur şi să îi lase ultima bomboană Clarei, care astfel va câştiga.
Dacă, dimpotrivă, n este par, Clara este obligată să aleagă un număr natural ℓ impar, deci ea îi lasă $k = n - \ell$ bomboane lui Isabelle, numărul natural k fiind, aşadar, impar. Dacă $k = 1$, Isabelle a câştigat deja, iar dacă $k \geq 3$, Isabelle poate copia strategia prezentată mai sus şi mânca $k - 2$ bomboane, asigurându-şi astfel victoria.
În concluzie, numerele n căutate sunt numerele naturale impare.

2. Fie ABC un triunghi şi fie Γ cercul său circumscris. Fie P punctul de intersecţie a dreptei BC cu tangenta în A la Γ. Fie D şi respectiv E simetricele punctelor B şi A faţă de P. Fie apoi ω_1 cercul circumscris triunghiului DAC şi fie ω_2 cercul circumscris triunghiului APB. Notăm cu F al doilea punct de intersecţie a cercurilor ω_1 şi ω_2 ($F \neq A$), apoi notăm cu G al doilea punct de intersecţie a cercului ω_1 cu dreapta BF ($G \neq F$) Demonstraţi că dreptele BC şi EG sunt paralele.

Soluţie: Să începem prin a face o figură.[1]



[1]Tratăm numai cazul $AB < AC$; cazul $AB > AC$ este similar; soluţia oficială pe care am adaptat-o, lucrează cu unghiuri orientate, acoperind astfel ambele cazuri.

O primă remarcă pe care o putem formula este că, deoarece P este mijlocul segmentelor $[AE]$ şi $[BD]$, patrulaterul $ABED$ est un paralelogram. Dreptele AB şi DE sunt, aşadar, paralele şi la fel şi dreptele AD şi BE.
O a doua observaţie frapantă este că E pare să se afle pe cercul ω_1. După ce am verificat acest fapt şi pe o a doua figură, ne grăbim să demonstrăm acest prim rezultat. Pentru aceasta, pornim o ,,vânătoare de unghiuri":

$$\sphericalangle DEA \equiv \sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD.$$

Un calcul de unghiuri ne arată atunci că:

$$\sphericalangle CBG = \sphericalangle PBF = \sphericalangle PAF = \sphericalangle EAF = \sphericalangle EGF,$$

ceea ce arată că dreptele BC şi EG sunt paralele.

Varianta cu unghiuri orientate:
Avem $(EA, ED) = (EA, AB) = (CA, CB) = (CA, CD)$, deci $E \in \omega_1$, apoi $(BC, EG) = (BC, BG) + (BG, EG) = (PB, BF) + (GF, GE) = (PA, AF) + (AF, AE) = 0°$ arată că $BC \parallel EG$.

3. Fie n un număr natural nenul. Spunem despre o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ că este n-pozitivă dacă, pentru orice numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu proprietatea că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, are loc relaţia $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq 0$.
a) Este adevărat că orice funcţie 2020-pozitivă este şi 1010-pozitivă?
b) Este adevărat că orice funcţie 1010-pozitivă este şi 2020-pozitivă?

Soluţie: La ambele subpuncte notăm $n = 1010$.
a) Fie f o funcţie $2n$-pozitivă şi fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Observând că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ şi f fiind $2n$-pozitivă, constatăm că

$$0 \leq f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) = 2\big(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\big),$$

ceea ce arată că avem într-adevăr $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geq 0$, adică f este n-pozitivă. Răspunsul este, aşadar, **da** !
b) Fie f funcţia definită prin: $f(x) = -1$ dacă x este un număr întreg cu proprietatea că $x \equiv 1 \pmod{2n}$ şi $f(x) = n$ în caz contrar. Atunci f este n-pozitivă. Într-adevăr, fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.
• Dacă există un număr natural k pentru care $f(x_k) = n$, cum $f(x_i) \geq -1, \forall\, i \neq k$, ştim că $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq f(x_k) - (n-1) = 1$.
• În caz contrar, avem $x_k \equiv 1 \pmod{2n}$ pentru orice k, deci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv n \not\equiv 0 \pmod{2n}$, astfel că acest caz nu este posibil.
Pe de altă parte, funcţia f nu este $2n$-pozitivă. Într-adevăr, dacă $x_1 = 1 - 2n$ şi $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2n} = 1$, atunci $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = 0$, dar $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = -2n < 0$.
Răspunsul este, aşadar, **nu** !

4. Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ un şir de numere naturale nenule şi fie $b_0, b_1, b_2, \ldots$ şirul definit prin $b_n = c.m.m.d.c(a_n, a_{n+1})$ pentru orice număr natural $n \geq 0$. Este posibil ca orice număr natural nenul să fie egal cu exact unul dintre termenii şirului $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Soluţie: Răspunsul este **da** !
În continuare, vom spune despre un şir $(b_k)_{k\geq 0}$ că este *agreabil* dacă, pentru orice $k \geq 0$, numerele b_k şi b_{k+2} sunt prime între ele. Fiind dat un şir agreabil $(b_k)_{k\geq 0}$, definim $a_0 = b_0$ şi apoi $a_k = b_k b_{k-1}$ pentru orice $k \geq 1$. Constatăm atunci că $c.m.m.d.c.(a_0, a_1) = b_0$ şi că $c.m.m.d.c.(a_k, a_{k+1}) = b_k \cdot c.m.m.d.c.(b_{k-1}, b_{k+1}) = b_k$ pentru orice $k \geq 1$. Aşadar, este suficient să construim un şir agreabil $(b_k)_{k\geq 0}$ cu proprietatea că orice număr natural nenul este egal cu exact unul dintre termenii şirului $b_0, b_1, b_2, \ldots$.
În acest scop notăm, pentru orice $k \geq 1$, cu p_k cel de-al k-lea număr prim şi cu q_k cea de-al k-lea număr compus (îl includem aici şi pe 1). Observăm cu uşurinţă că $p_k \geq 2k - 1$ şi că $q_k \leq 2k$, deci că $p_k \geq q_k - 1$. Deducem că $q_k \leq p_k + 1 < 2p_k < 2p_{k+2}$, deci $c.m.m.d.c.(p_k, q_k) = c.m.m.d.c.(p_{k+2}, q_k) = 1$.
Definim atunci $b_{4k} = p_{2k+1}$, $b_{4k+1} = p_{2k+2}$, $b_{4k+2} = q_{2k+1}$ şi $b_{4k+3} = q_{2k+2}$, pentru orice $k \geq 0$. Mai întâi, orice număr natural nenul este egal cu exact unul dintre termenii şirului $b_0, b_1, b_2, \ldots$. În plus, pentru orice $k \geq 0$, avem:
- $c.m.m.d.c.(b_{4k}, b_{4k+2}) = c.m.m.d.c.(p_{2k+1}, q_{2k+1}) = 1$,
- $c.m.m.d.c.(b_{4k+1}, b_{4k+3}) = c.m.m.d.c.(p_{2k+2}, q_{2k+2}) = 1$,
- $c.m.m.d.c.(b_{4k+2}, b_{4k+4}) = c.m.m.d.c.(q_{2k+1}, p_{2k+3}) = 1$ şi
- $c.m.m.d.c.(b_{4k+3}, b_{4k+5}) = c.m.m.d.c.(q_{2k+2}, p_{2k+4}) = 1$.

Prin urmare, şirul $(b_k)_{k\geq 0}$ este un şir cu proprietăţile dorite, de unde concluzia.