BARAJ NR. 4 JUNIORI FRANŢA 2019

15 mai 2019

1. Fie S o mulţime de numere întregi. Spunem că S este nesumabilă dacă, oricare ar fi întregii x şi y aparţinând lui S, suma $x + y$ nu aparţine lui S. Pentru orice număr natural $n \geq 1$, notăm cu s_n numărul de submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ care sunt nesumabile. Demonstraţi că $s_n \geq 2^n$.

2. Fie m şi n două numere naturale. Demonstraţi că $n! \neq m^2 + 2019$.

3. Fie ABC un triunghi şi fie M piciorul medianei din A. De asemenea, fie ℓ_b bisectoarea lui $\widehat{AMB}$ şi ℓ_c bisectoarea lui $\widehat{AMC}$. În sfârşit, fie B' proiecţia lui B pe ℓ_b, C' proiecţia lui C pe ℓ_c şi fie A' punctul de intersecţie a dreptelor AM şi $B'C'$. Demonstraţi că $A'B' = A'C'$.

4. Fie $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că

$$f(n+2) = \frac{f(n+1) + f(n)}{2},$$

pentru orice număr întreg n. Presupunem că funcţia f este mărginită, adică există un număr real F astfel încât $-F \leq f(n) \leq F$ pentru orice n. Demonstraţi că f este o funcţie constantă.[1]

Timp de lucru: 4 ore

[1] Considerăm problema mai potrivită elevilor de clasa a IX-a decât juniorilor. Problema nu face parte din universul programei OBMJ.