BARAJ NR. 4 JUNIORI FRANŢA 2019
15 mai 2019

1. Fie S o mulţime de numere întregi. Spunem că S este nesumabilă dacă, oricare ar fi întregii x şi y aparţinând lui S, suma $x+y$ nu aparţine lui S. Pentru orice număr natural $n \geq 1$, notăm cu s_n numărul de submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ care sunt nesumabile. Demonstraţi că $s_n \geq 2^n$.

Soluţie: Fie S o submulţime a mulţimii $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$. O asemenea submulţime este nesumabilă deoarece, pentru $x, y \in S$, avem $x+y \geq 2(n+1) > 2n \geq z$. Ori mulţimea $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ are 2^n submulţimi. deducem că $s_n \geq 2^n$.

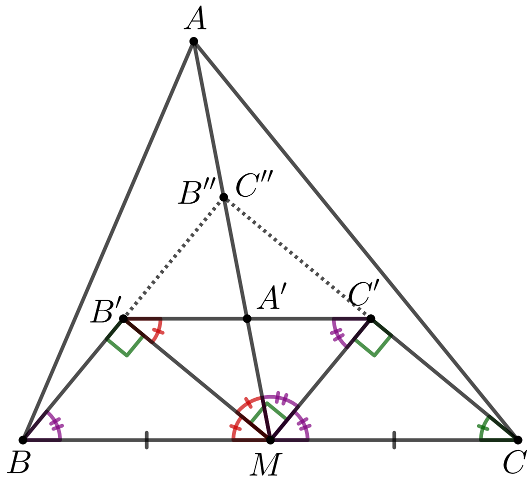
Remarcă: Se poate demonstra că $2^{n+1} \leq s_n \leq 2^{n+4}$, pentru orice $n \geq 3$.
Prima inegalitate se poate demonstra astfel: pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm submulţimile lui $\{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$ care îl conţin pe k. Fiecare submulţime este numărată o singură dată, după cel mai mic element al ei. Toate aceste submulţimi sunt nesumabile. Asemenea submulţimi, cu k cel mai mic element, sunt 2^{k-1}. Obţinem astfel $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ submulţimi nesumabile, altele decât cele care au intervenit în soluţie.
Dacă mai adăugăm mulţimea nesumabilă $\{1, 3\}$ care nu a fost luată în considerare până acum, avem deja 2^{n+1} submulţimi nesumabile.

2. Fie m şi n două numere naturale. Demonstraţi că $n! \neq m^2 + 2019$.

Soluţie: Presupunem că $m, n \in \mathbb{N}$ verifică $n! = m^2 + 2019$. Din $n! \geq 2019$ rezultă $n \geq 7$, deci $9 \mid n!$. Cum $2019 \equiv 3 \pmod 9$, rezultă că $m^2 \equiv 3 \pmod 9$, ceea ce este imposibil: dacă $3 \mid m^2$, atunci $9 \mid m^2$, contradicţie.

3. Fie ABC un triunghi şi fie M piciorul medianei din A. De asemenea, fie ℓ_b bisectoarea lui $\widehat{AMB}$ şi ℓ_c bisectoarea lui $\widehat{AMC}$. În sfârşit, fie B' proiecţia lui B pe ℓ_b, C' proiecţia lui C pe ℓ_c şi fie A' punctul de intersecţie a dreptelor AM şi $B'C'$. Demonstraţi că $A'B' = A'C'$.

Soluţia 1: Fie $\alpha = m(\sphericalangle AMB')$ şi $\beta = m(\sphericalangle AMC')$. Din construcţie, $2(\alpha + \beta) = 180°$, deci $m(\sphericalangle B'MC') = \alpha + \beta = 90°$. Rezultă că $m(\sphericalangle B'BM) = \beta$ şi $m(C'CM) = \alpha$. Atunci triunghiurile $B'BM$ şi $C'MC$ sunt congruente (ULU). Deducem că $BB' = MC'$ şi $CC' = MB'$, deci şi triunghiul $MC'B'$ este congruent cu cele două de mai sus. Rezultă că $m(\sphericalangle A'C'M) = m(\sphericalangle C'MC) = m(\sphericalangle C'MA') = \beta$, deci triunghiul $MA'C'$ este isoscel, cu $MA' = A'C'$. Analog se obţine că $MA' = A'B'$, ceea ce implică $A'B' = A'C'$.



Soluţia 2: Dacă $BB' \cap AM = \{B''\}$ şi $CC' \cap AM = \{C''\}$, triunghiurile BMB'' şi CMC'' sunt isoscele (bisectoarele sunt înălţimi), deci $MB'' = BM = CM = MC''$, de unde rezultă că $B'' = C''$.
$[B'C']$ este linie mijlocie în triunghiul $B''BC$, deci $B'A' = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC = A'C'$.

4. Fie $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că

$$f(n+2) = \frac{f(n+1) + f(n)}{2},$$

pentru orice număr întreg n. Presupunem că funcţia f este mărginită, adică există un număr real F astfel încât $-F \leq f(n) \leq F$ pentru orice n. Demonstraţi că f este o funcţie constantă.[1]

Soluţie:
Să presupunem că f nu este constantă. Atunci există un număr între n şi un număr real nenul a astfel încât $f(n+1) - f(n) = a$. Pentru orice k întreg, să notăm $d_k = f(k+1) - f(k)$. Atunci

$$d_{k+1} = f(k+2) - f(k+1) = \frac{f(k+1) + f(k)}{2} - f(k+1) = -\frac{d_k}{2},$$

deci $d_{k-1} = -2d_k$. Prin inducţie după k (n este fixat) rezultă atunci că $d_{n-k} = (-2)^k a$ pentru orice $k \geq 0$. Dar, pentru orice număr întreg k, ştim că $|d_k| \leq |f(k+1)| + |f(k)| \leq 2F$. Dar acest rezultat contrazice faptul că $|d_{n-k}| = 2^k \cdot |a|$ pentru orice $k \geq 0$. Aşadar, presupunerea noastră iniţială s-a dovedit a fi falsă, deci f este constantă.

[1] Considerăm problema mai potrivită elevilor de clasa a IX-a decât juniorilor. Problema nu face parte din universul programei OBMJ.