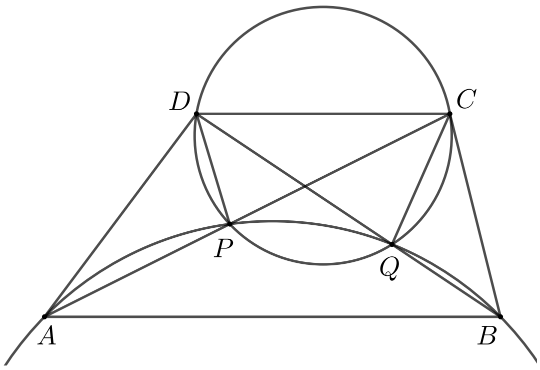
BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANŢA 2019
20 martie 2019

1. Fie $ABCD$ un trapez în care (AB) este paralel cu (CD). Fie P un punct pe $[AC]$, iar Q un punct pe $[BD]$ astfel încât $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle BQC$. Demonstraţi că $\sphericalangle AQD \equiv \sphericalangle BPC$.

Soluţie:
Ni se dau multe congruenţe de unghiuri; să le exploatăm. Mai întâi, observăm că $m(\sphericalangle DPC) = 180° - m(\sphericalangle APD) = 180° - m(\sphericalangle CQB) = m(\sphericalangle DQC)$, ceea ce arată că punctele C, D, P şi Q sunt conciclice.
Deducem că $m(\sphericalangle BQP) = 180° - m(\sphericalangle PQD) = 180° - m(\sphericalangle PCD) = 180° - m(\sphericalangle PAB)$, ceea ce arată că şi punctele A, B, P şi Q sunt conciclice.
Conchidem că $m(\sphericalangle AQD) = m(\sphericalangle AQP) + m(\sphericalangle PQD) = m(\sphericalangle ABP) + m(\sphericalangle PCD) = \big(m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle PBC)\big) + \big(m(\sphericalangle BCD) - m(\sphericalangle BCP)\big) = \big(m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCD)\big) - \big(m(\sphericalangle PBC) + m(\sphericalangle BCP)\big) = 180° - \big(180° - m(\sphericalangle CPB)\big) = m(\sphericalangle CPB)$.



2. Fie a, b, c numere reale pozitive sau nule astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstraţi că
$$\frac{5+2b+c^2}{1+a} + \frac{5+2c+a^2}{1+b} + \frac{5+2a+b^2}{1+c} \geq 13.$$

Soluţie:
Din inegalitatea rearanjamentelor avem
$$\frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+b} + \frac{a}{1+c} \geq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$
şi
$$\frac{c^2}{1+a} + \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+c} \geq \frac{a^2}{1+a} + \frac{b^2}{1+b} + \frac{c^2}{1+c}.$$
Atunci $\dfrac{5+2b+c^2}{1+a} + \dfrac{5+2c+a^2}{1+b} + \dfrac{5+2a+b^2}{1+c} \geq \dfrac{5+2a+a^2}{1+a} + \dfrac{5+2b+b^2}{1+b} + \dfrac{5+2c+c^2}{1+c} = 4\left(\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c}\right) + (1+a) + (1+b) + (1+c) = 4 +$

$4\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\right)$.
Dar din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu), sau aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcţia convexă $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, se obţine că
$4+4\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\right)\geq 4+4\cdot\dfrac{9}{1+a+1+b+1+c}=13.$
Egalitatea are loc dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

3. Spunem despre o pereche de numere întregi (a,b) că este *cipriotă* dacă $a\geq b\geq 2$, a şi b sunt prime între ele şi $a+b$ divide a^b+b^a. Demonstraţi că există o infinitate de perechi cipriote distincte.

Soluţie:
Să notăm $k=a-b$. Cum a şi b sunt prime între ele, ştim că $a\neq b$, deci $k\geq 1$. Astfel,

$$a^b+b^a\equiv a^b+(-a)^a\equiv a^b\big(1+(-1)^a a^k\big)\pmod{a+b}.$$

Ori a este prim cu b, deci şi cu $a+b$. Conform teoremei lui Gauss, vrem ca $a+b=2a-k$ să dividă $1+(-1)^a a^k$, adică pe $a^k+(-1)^a$. În lipsă de ceva mai bun, să studiem acum valorile mici ale lui k. A alege $k=1$ ar reveni la a ne dori ca $a+b$ să dividă $a\pm 1$, ceea ce este imposibil deoarece $a+b>a+1>a-1$. Ne uităm atunci la $k=2$. În acest caz, ne dorim ca $2a-2=2(a-1)$ să dividă $a^2+(-1)^a$. Să observăm însă că $a^2+(-1)^a=1+(-1)^a\pmod{a-1}$. Prin urmare, cum $a\geq 2$, trebuie neapărat să alegem a impar. În acest caz, ne rămâne să facem ca $2(a-1)$ să dividă $a^2-1=(a-1)(a+1)$, cu alte cuvinte ca 2 să dividă $a+1$. Dar cum a este impar, acest lucru este într-adevăr adevărat. În concluzie, am demonstrat că toate perechile de forma $(2k+1,2k-1)$, unde $k\geq 2$, sunt cipriote.

Notă: Există şi alte perechi cipriote. Îi lăsăm cititorului plăcerea de a verifica că numerele întregi $a=(2\ell)^{4\ell}+2\ell-1$ şi $b=(2\ell)^{4\ell}-2\ell-1$ formează şi ele o pereche cipriotă pentru orice număr întreg $\ell\geq 1$.

4. Fie $\mathcal{C}$ un cerc de rază 1 şi fie T un număr real. Spunem despre o mulţime de triunghiuri că este T-*merară* dacă ea satisface următoarele trei condiţii:
• vârfurile fiecărui triunghi aparţin mulţimii $\mathcal{C}$;
• triunghiurile au interioarele două câte două disjuncte (dar două triunghiuri pot avea un vârf sau o latură comună);
• fiecare triunghi are perimetrul mai mare ca T.
Determinaţi toate numerele reale T cu proprietatea că, pentru orice număr natural $n\geq 1$, există o mulţime T-merară care conţine exact n triunghiuri.

Soluţie: Vom demonstra că numerele reale căutate sunt exact numerele reale $T\leq 4$. Pentru aceasta, să fixăm un $T\leq 4$. Începem prin a demonstra că există mulţimi T-merare cu oricât de multe elemente. Folosim următoarea construcţie: fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}$ şi fie P un punct oarecare al cercului $\mathcal{C}$,

diferit de A şi B. Inegalitatea triunghiului indică faptul că APB are perimetrul $PA + PB + AB > 2AB = 4 \geq T$, aşadar există mulţimi T-merare cu un element. Pornind de la această remarcă, demonstrăm prin inducţie după n că există n puncte P_1, P_2, $\ldots$, P_n, în această ordine, pe unul din semicercurile de diametru $[AB]$ (cu P_1 aproape de A şi P_n aproape de B) astfel încât mulţimea formată din triunghiurile AP_iP_{i+1} (cu $i \leq n-1$) şi ABP_n să fie o mulţime T-merară (având n elemente). Am văzut deja că pentru $n = 1$ putem lua P_1 oricum pe $\mathcal{C}$.
Apoi, odată admisă existenţa punctelor $P_1, P_2, \ldots, P_n$, să construim punctul P_{n+1}. În acest scop, considerăm numărul real $\varepsilon = AB + BP_n - AP_n - T$ care, conform ipotezei de inducţie, este strict mai mare ca 0. Îl plasăm atunci pe P_{n+1}, oriunde pe arcul BP_n astfel încât $BP_{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. În aceste condiţii, cele $n+1$ triunghiuri ale noastre au într-adevăr interioarele disjuncte două câte două şi este suficient să verificăm că AP_{n+1} şi AP_nP_{n+1} au perimetrul strict mai mare ca T.
Pentru primul triunghi, acest fapt rezultă din remarca noastră iniţială, iar pentru cel de-al doilea triunghi rezultă din nou din inegalitatea triunghiului întrucât perimetrul lui AP_nP_{n+1} este $AP_n + AP_{n+1} + P_nP_{n+1} \geq AP_n + (BP_n - BP_{n+1}) + (AB - BP_{n+1}) = T + \varepsilon - 2BP_{n+1} > T$. Cu aceasta, inducţia noastră este încheiată, deci avem mulţimi T-merare de orice mărime.
Reciproc, să considerăm un $T > 4$ şi să notăm $\varepsilon = \dfrac{T-4}{2} > 0$. Considerăm de asemenea un triunghi ABC ale cărui vârfuri sunt pe cercul $\mathcal{C}$ şi al cărui perimetru este strict mai mare ca T. Notând cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB şi cu $p = \dfrac{a+b+c+}{2} > \dfrac{T}{2}$ semiperimetrul lui ABC, formula lui Heron ne arată că triunghiul ABC este de arie $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
Cum $p - a \geq p - 2 \geq \dfrac{T}{2} - 2 = \varepsilon$ şi, la fel, $p - b \geq \varepsilon$ şi $p - c \geq \varepsilon$, deducem că $S \geq \sqrt{p\varepsilon^3} \geq \sqrt{2\varepsilon^3}$.
În consecinţă, dacă o mulţime T-merară conţine n triunghiuri, acestea având interioarele disjuncte, ele acoperă în ansamblul lor o suprafaţă de cel puţin $n\sqrt{2\varepsilon^3}$. Această arie neputând depăşi π, care este aria discului conţinut în interiorul lui $\mathcal{C}$, deducem că $n \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{2\varepsilon^3}}$, de unde concluzia problemei.

Notă: Invocând alte argumente şi fără a face apel la formula lui Heron se poate demonstra că $n \leq \dfrac{\pi}{\varepsilon}$, ceea ce ne oferă o aproximare mai bună atunci când T este aproape de 4.