BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANŢA 2019
20 martie 2019

1. Fie $ABCD$ un trapez în care (AB) este paralel cu (CD). Fie P un punct pe $[AC]$, iar Q un punct pe $[BD]$ astfel încât $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle BQC$. Demonstraţi că $\sphericalangle AQD \equiv \sphericalangle BPC$.

2. Fie a, b, c numere reale pozitive sau nule astfel încât $a+b+c=1$. Demonstraţi că

$$\frac{5+2b+c^2}{1+a}+\frac{5+2c+a^2}{1+b}+\frac{5+2a+b^2}{1+c}\geq 13.$$

3. Spunem despre o pereche de numere întregi (a, b) că este *cipriotă* dacă $a \geq b \geq 2$, a şi b sunt prime între ele şi $a+b$ divide a^b+b^a. Demonstraţi că există o infinitate de perechi cipriote distincte.

4. Fie $\mathcal{C}$ un cerc de rază 1 şi fie T un număr real. Spunem despre o mulţime de triunghiuri că este T-*merară* dacă ea satisface următoarele trei condiţii:
- vârfurile fiecărui triunghi aparţin mulţimii $\mathcal{C}$;
- triunghiurile au interioarele două câte două disjuncte (dar două triunghiuri pot avea un vârf sau o latură comună);
- fiecare triunghi are perimetrul mai mare ca T.

Determinaţi toate numerele reale T cu proprietatea că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, există o mulţime T-merară care conţine exact n triunghiuri.

Timp de lucru: 4 ore