BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2019
26 februarie 2019

1. Fie a şi b două numere reale astfel încât $ab \geq a^3 + b^3$.
Demonstraţi că $a + b \leq 1$.

2. O *colorare* a lui $\mathbb{Q}$ constă din a colora orice număr raţional fie în roşu, fie în albastru. Spunem că o colorare a lui $\mathbb{Q}$ este *armonioasă* dacă, pentru orice două numere raţionale x şi y care sunt colorate cu aceeaşi culoare, numărul raţional $x+y$ este colorat tot cu culoarea pe care o au x şi y.
Găsiţi toate colorările armonioase ale lui $\mathbb{Q}$.

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi fie D un punct pe (AC) astfel încât A să fie situat între C şi D, dar să nu fie mijlocul segmentului $[CD]$. Notăm cu d_1 şi d_2 bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$ şi cu Δ mediatoarea lui $[BD]$. În sfârşit, fie E şi F punctele de intersecţie ale lui Δ cu dreptele d_1, respectiv d_2.
Demonstraţi că punctele A, D, E şi F sunt conciclice.

4. Într-un turneu la care participă n jucători, numerotaţi de la 1 la n, fiecare pereche de jucători se întâlneşte o dată. Întâlnirea se termină prin victoria unuia dintre jucători şi înfrângerea celuilalt. Notăm cu v_k numărul de victorii ale jucătorului k pe ansamblul turneului şi cu d_k numărul înfrângerilor sale.
Demonstraţi că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} d_k^2$.

Timp de lucru: 4 ore