BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2019
26 februarie 2019

1. Fie a şi b două numere reale astfel încât $ab \geq a^3 + b^3$.
Demonstraţi că $a + b \leq 1$.

2. O *colorare* a lui $\mathbb{Q}$ constă din a colora orice număr raţional fie în roşu, fie în albastru. Spunem că o colorare a lui $\mathbb{Q}$ este *armonioasă* dacă, pentru orice două numere raţionale x şi y care sunt colorate cu aceeaşi culoare, numărul raţional $x+y$ este colorat tot cu culoarea pe care o au x şi y.
Găsiţi toate colorările armonioase ale lui $\mathbb{Q}$.

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi fie D un punct pe (AC) astfel încât A să fie situat între C şi D, dar să nu fie mijlocul segmentului $[CD]$. Notăm cu d_1 şi d_2 bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$ şi cu Δ mediatoarea lui $[BD]$. În sfârşit, fie E şi F punctele de intersecţie ale lui Δ cu dreptele d_1, respectiv d_2.
Demonstraţi că punctele A, D, E şi F sunt conciclice.

4. Într-un turneu la care participă n jucători, numerotaţi de la 1 la n, fiecare pereche de jucători se întâlneşte o dată. Întâlnirea se termină prin victoria unuia dintre jucători şi înfrângerea celuilalt. Notăm cu v_k numărul de victorii ale jucătorului k pe ansamblul turneului şi cu d_k numărul înfrângerilor sale.
Demonstraţi că $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2$.

Timp de lucru: 4 ore

SOLUŢII OFICIALE:

1. Fie a şi b două numere reale astfel încât $ab \geq a^3 + b^3$.
Demonstraţi că $a + b \leq 1$.

Soluţie:
Deoarece $(a+b)^2 = (a-b)^2+4ab \geq 4ab$, deducem că $(a+b)^3 = a^3+b^3+3(a+b)ab \leq (3a+3b+1)ab \leq (3a+3b+1)\cdot\dfrac{(a+b)^2}{4}$. Dacă $a+b > 1$, putem împărţi inegalitatea noastră cu $\dfrac{(a+b)^2}{4}$ şi ajunge la $4(a+b) \leq 3a+3b+1$, deci la faptul că avem totuşi $a + b \leq 1$.

2. O *colorare* a lui $\mathbb{Q}$ constă din a colora orice număr raţional fie în roşu, fie în albastru. Spunem că o colorare a lui $\mathbb{Q}$ este *armonioasă* dacă, pentru orice două numere raţionale x şi y care sunt colorate cu aceeaşi culoare, numărul raţional $x+y$ este colorat tot cu culoarea pe care o au x şi y.
Găsiţi toate colorările armonioase ale lui $\mathbb{Q}$.

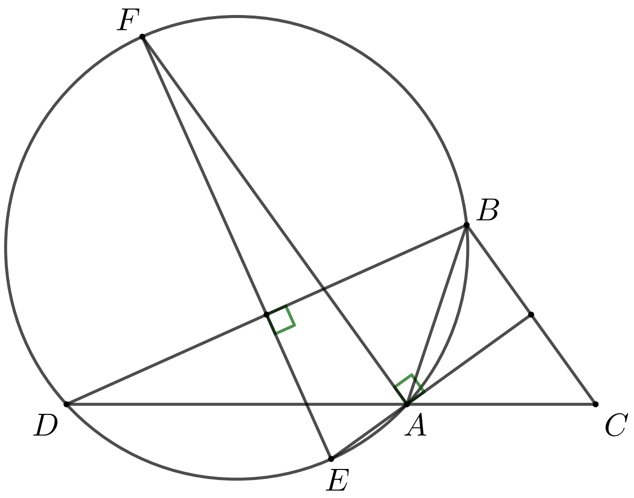
Soluţie:
Vom demonstra că singurele colorări convenabile sunt următoarele:
- colorăm toate numerele raţionale cu aceeaşi culoare;
- colorăm toate numerele raţionale pozitive sau nule cu o culoare şi toate raţionalele negative cu cealaltă culoare;
- colorăm toate numerele raţionale pozitive cu o culoare şi toate raţionalele negative sau nule cu cealaltă culoare.

Mai întâi, să remarcăm că toate aceste colorări sunt armonioase. Să arătăm acum că sunt singurele.
În continuare, vom presupune că dispunem de o colorare armonioasă fixată. Notăm cu A mulţimea numerelor raţionale colorate cu albastru şi cu R mulţimea numerelor raţionale colorate cu roşu. Cu aceste notaţii, dacă x este un număr raţional aparţinând mulţimii $M \in \{A, R\}$, vom arăta mai întâi că pentru orice număr raţional $p/q > 0$, px/q aparţine tot lui E. Într-adevăr, dacă $x/q \notin E$, atunci o inducţie imediată arată că $x = qx/q \notin E$, ceea ce nu este posibil. Deducem că $x/q \in E$, apoi că $px/q \in E$, tot printr-o inducţie imediată.
Astfel, toate raţionalele strict pozitive sunt de aceeaşi culoare ca şi 1, iar toate raţionalele strict negative sunt de aceeaşi culoare ca şi -1. Având în vedere ceea ce ne-am propus să demonstrăm, mai rămâne de arătat că dacă 1 şi -1 sunt de aceeaşi culoare, atunci şi 0 este de acea culoare: acest fapt rezultă tocmai din faptul că $0 = 1 + (-1)$ datorită caracterului armonios al colorării noastre.

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi fie D un punct pe (AC) astfel încât A să fie situat între C şi D, dar să nu fie mijlocul segmentului $[CD]$. Notăm cu d_1 şi d_2 bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$ şi cu Δ

mediatoarea lui $[BD]$. În sfârşit, fie E şi F punctele de intersecţie ale lui Δ cu dreptele d_1, respectiv d_2.
Demonstraţi că punctele A, D, E şi F sunt conciclice.

Soluţie:
O figură frumoasă ne sugerează că de fapt A, B, D, E şi F sunt conciclice, ceea ce vom demonstra în continuare.
Fie Γ cercul circumscris triunghiului ABD şi fie G_1 şi G_2 punctele de intersecţie, diferite de D însuşi, ale dreptelor d_1, respectiv d_2, cu Γ. Este suficient să demonstrăm că $E = G_1$ şi că $F = G_2$.
Deoarece d_2 este bisectoarea exterioară a lui $\sphericalangle BAC$, deci bisectoarea interioară a lui $\sphericalangle BAD$, teorema polului Sud (vezi sfârşitul prezentului material) indică faptul că G_2 este egal depărtat de B eşi D. Analog, d_1 este bisectoarea interioară a lui $\sphericalangle BAC$, deci bisectoarea exterioară a lui $\sphericalangle BAD$, iar teorema polului Nord ne spune că G_1 este egal depărtat de B şi D.
Dar atunci G_1G_2 este mediatoarea lui $[BD]$, deci $G_1 = E$ şi $G_2 = F$, de unde concluzia.



Remarcă: Ipoteza $AB = AC$ nu este necesară.

4. Într-un turneu la care participă n jucători, numerotaţi de la 1 la n, fiecare pereche de jucători se întâlneşte o dată. Întâlnirea se termină prin victoria unuia dintre jucători şi înfrângerea celuilalt. Notăm cu v_k numărul de victorii ale jucătorului k pe ansamblul turneului şi cu d_k numărul înfrângerilor sale.
Demonstraţi că $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2$.

Soluţie:
Deoarece fiecare jucător dispută $n-1$ partide şi în ansamblul lor jucătorii totalizează $\dfrac{n(n-1)}{2}$ victorii, ştim că

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{n(n-1)}{2}$$

şi că $v_k + d_k = n-1$ pentru orice $k \leq n$. Deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} d_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (n-1-v_k)^2 = n(n-1)^2 - 2(n-1)\sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k^2.$$

DOUĂ TEOREME DE GEOMETRIE

La pregătirea lotului de juniori al Franţei s-a făcut următoarea problemă, numită **Teorema polului Sud**:

Teorema polului Sud:
Fie ABC un triunghi şi Γ cercul său circumscris. Numim *polul Sud* punctul S de intersecţie a bisectoarei (interioare) a unghiului $\sphericalangle BAC$ cu cercul Γ.
1) Arătaţi că $SB = SC$.
Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.
2) Arătaţi că $SB = SC = SI$.
Fie I_A centrul cercului exînscris triunghiului ABC opus vârfului A.
3) Arătaţi că $SB = SC = SI = SI_A$.
Fie A_0 punctul de intersecţie a dreptelor AS şi BC.
4) Arătaţi că $SA \cdot SA_0 = SI^2$.
Fie E punctul de intersecţie dintre BI şi Γ. Fie X, Y punctele de intersecţie dintre SE şi AC, respectiv BC.
5) Arătaţi că $CXIY$ este un romb.

În schimb, nu am găsit nicăieri o teoremă a polului Nord. Presupun că ea ar trebui să afirme că punctul diametral opus polului sud se găseşte şi el pe mediatoare.