

BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANȚA 2019

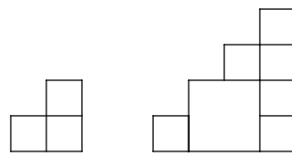
9 ianuarie 2019

1. Fie x și y două numere întregi astfel încât $5x + 6y$ și $6x + 5y$ să fie pătrate perfecte. Arătați că x și y sunt divizibili cu 11.

2. Fie Γ un cerc de centru O și de rază r și ℓ o dreaptă care nu taie Γ . Notăm cu E punctul de intersecție dintre ℓ și perpendiculara din O pe ℓ . Fie M un punct al lui ℓ diferit de E . Tangentele din M la Γ intersectează Γ în A și B . În fine, fie H punctul de intersecție a dreptelor AB și OE .

Demonstrați că $OH = \frac{r^2}{OE}$.

3. Fie n un număr natural nenul. O scară de mărime n constă din pătrățele 1×1 , cu 1 pătrățel pentru prima treaptă, 2 pătrățele pentru treapta a doua și așa mai departe, până la n pătrățele pentru treapta a n -a. Dispunem de pietre pătrate (având lungimea laturii număr natural) de orice dimensiune pentru a construi o asemenea scară și notăm cu $f(n)$ numărul minim de pietre pe care trebuie să le folosim pentru a construi o scară de mărime n . De exemplu, $f(2) = 3$ și $f(4) = 7$, după cum se poate vedea mai jos.



- Aflați toate numerele naturale nenule n pentru care $f(n) = n$.
- Aflați toate numerele naturale nenule n pentru care $f(n) = n + 1$.

4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pentru care

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

oricare ar fi numerele naturale x și y .

Timp de lucru: 4 ore