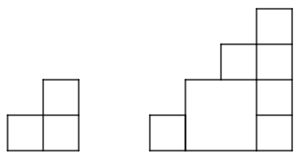
BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2019
9 ianuarie 2019

1. Fie x şi y două numere întregi astfel încât $5x + 6y$ şi $6x + 5y$ să fie pătrate perfecte. Arătaţi că x şi y sunt divizibili cu 11.

2. Fie Γ un cerc de centru O şi de rază r şi ℓ o dreaptă care nu taie Γ. Notăm cu E punctul de intersecţie dintre ℓ şi perpendiculara din O pe ℓ. Fie M un punct al lui ℓ diferit de E. Tangentele din M la Γ intersectează Γ în A şi B. În fine, fie H punctul de intersecţie a dreptelor AB şi OE.
Demonstraţi că $OH = \dfrac{r^2}{OE}$.

3. Fie n un număr natural nenul. O scară de mărime n constă din pătrăţele 1×1, cu 1 pătrăţel pentru prima treaptă, 2 pătrăţele pentru treapta a doua şi aşa mai departe, până la n pătrăţele pentru treapta a n-a. Dispunem de pietre pătrate (având lungimea laturii număr natural) de orice dimensiune pentru a construi o asemenea scară şi notăm cu $f(n)$ numărul minim de pietre pe care trebuie să le folosim pentru a construi o scară de mărime n. De exemplu, $f(2) = 3$ şi $f(4) = 7$, după cum se poate vedea mai jos.



a) Aflaţi toate numerele naturale nenule n pentru care $f(n) = n$.
b) Aflaţi toate numerele naturale nenule n pentru are $f(n) = n + 1$.

4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pentru care

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

oricare ar fi numerele naturale x şi y.

Timp de lucru: 4 ore

SOLUŢII OFICIALE

1. Fie x şi y două numere întregi astfel încât $5x + 6y$ şi $6x + 5y$ să fie pătrate perfecte. Arătaţi că x şi y sunt divizibili cu 11.

Soluţie:

Fie a şi b două numere naturale astfel încât $5x+6y = a^2$ şi $6x+5y = b^2$. Observăm că $a^2 + b^2 = 11(x + y)$ este divizibil cu 11. Ori, modulo 11, pătratele perfecte sunt 0, 1, 3, 4, 5 şi 9; astfel, suma a două pătrate perfecte este 0 (mod 11) dacă şi numai dacă cele două pătrate în cauză sunt 0 (mod 11).

În cazul nostru, acest lucru arată că a şi b sunt divizibile cu 11. Există, deci, numerele naturale A şi B astfel încât $a = 11A$ şi $b = 11B$. Dar atunci $11x = (6\cdot 6-5\cdot 5)x = 6(b^2-5y)-5(a^2-6y) = 6b^2-5a^2 = 11^2(6B^2-5A^2)$, deci $x = 11(6B^2-5A^2)$ este într-adevăr divizibil cu 11. Analog se arată că $y = 11(6A^2 - 5B^2)$ este şi el divizibil cu 11.

2. Fie Γ un cerc de centru O şi de rază r şi ℓ o dreaptă care nu taie Γ. Notăm cu E punctul de intersecţie dintre ℓ şi perpendiculara din O pe ℓ. Fie M un punct al lui ℓ diferit de E. Tangentele din M la Γ intersectează Γ în A şi B. În fine, fie H punctul de intersecţie a dreptelor AB şi OE.

Demonstraţi că $OH = \dfrac{r^2}{OE}$.

Soluţie:

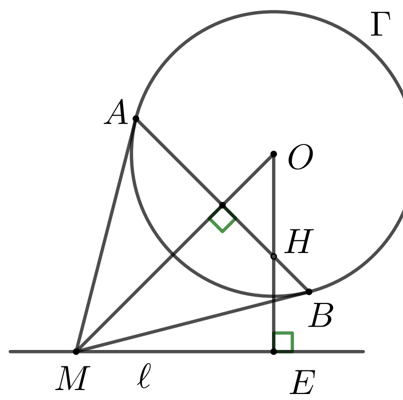
Să observăm mai întâi că triunghiurile OAM, OBM şi OEM sunt dreptunghice în A, B şi respectiv E, astfel că punctele A, O, B, E, M aparţin, toate, cercului de diametru $[OM]$. Ori, conform teoremei sinusurilor în triunghiurile OBH şi OEA, ştim că

$$\frac{OH \cdot OE}{r^2} = \frac{OH}{OB} \cdot \frac{OE}{OA} = \frac{\sin(\widehat{OBA})}{\sin(\widehat{OHB})} \cdot \frac{\sin(\widehat{OAE})}{\sin(\widehat{OEA})}.$$

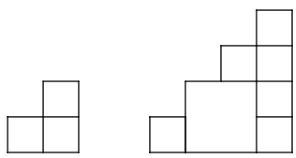
Punctele O, B, E şi A fiind conciclice, ştim că $\widehat{OBA} \equiv \widehat{OEA}$. Pe de altă parte, deoarece dreptele AH şi HO sunt perpendiculare pe OM, respectiv ME, ştim de asemenea că

$$m(\widehat{OHB}) = 180^\circ - m(\widehat{AHO}) = 180^\circ - m(\widehat{OME}) = 180^\circ - m(\widehat{OAE}).$$

Acest lucru arată că $\sin(\widehat{OBA}) = \sin(\widehat{OEA})$ şi că $\sin(\widehat{OHB}) = \sin(\widehat{OAE})$, de unde concluzia.



3. Fie n un număr natural nenul. O scară de mărime n constă din pătrăţele 1×1, cu 1 pătrăţel pentru prima treaptă, 2 pătrăţele pentru treapta a doua şi aşa mai departe, până la n pătrăţele pentru treapta a n-a. Dispunem de pietre pătrate (având lungimea laturii număr natural) de orice dimensiune pentru a construi o asemenea scară şi notăm cu $f(n)$ numărul minim de pietre pe care trebuie să le folosim pentru a construi o scară de mărime n. De exemplu, $f(2) = 3$ şi $f(4) = 7$, după cum se poate vedea mai jos.



a) Aflaţi toate numerele naturale nenule n pentru care $f(n) = n$.
b) Aflaţi toate numerele naturale nenule n pentru are $f(n) = n + 1$.
Soluţie:
Să începem cu câteva definiţii şi observaţii generale. În continuare, vom nota (i, j) pătrăţelul 1×1 situat la etajul j al celei de-a i-a trepte. Vom numi pătrăţel superior orice pătrăţel 1×1 de forma (k, k), adică situat cel mai sus pe o treaptă.
Ne uităm la o scară de mărime n construită din $f(n)$ pietre pătrate. Două pătrăţele superioare nu pot aparţine unei aceleaşi pietre. Deoarece sunt n pătrăţele superioare la o scară de mărime n, deducem că $f(n) \geq n$ pentru orice $n > 0$.
Răspundem acum la cerinţele a) şi b).
a) Mai întâi, este clar că $f(1) = 1$. Fie acum $n > 1$ astfel încât $f(n) = n$. Conform observaţiei de mai sus, fiecare piatră conţine câte un unic pătrăţel superior. În particular, piatra care conţine pătrăţelul $(n, 1)$ trebuie să conţină şi un pătrăţel superior. Acesta trebuie să fie colţul din stânga-sus la pietrei, adică diagonal opus lui $(n, 1)$. Pătrăţelele aflate pe diagonala care pleacă din $(n, 1)$ sunt $(n - 1, 2)$, $(n - 2, 3)$, ... , $(n + 1 - k, k)$. Pentru ca pătrăţelul $(n + 1 - k, k)$ să fie superior,

trebuie ca $n+1-k=k$, adică n să fie impar. Piatra căutată este de latură $k=\dfrac{n+1}{2}$. Ştergând această piatră, scara se descompune în două scări de mărime $n-k=\dfrac{n-1}{2}$. Pentru fiecare din acestea trebuie să avem $f\left(\dfrac{n-1}{2}\right)=\dfrac{n-1}{2}$.
Prin urmare, o inducţie imediată arată că există un $k\geq 1$ astfel încât $n=2^k-1$. (Poate fi comod să scriem numerele în baza 2. Conform celor de mai sus, un număr $n_{(10)}=\overline{a_1a_2\ldots a_{j-1}a_j}_{(2)}$ are proprietatea $f(n)=n$ dacă n este impar şi numărul $\dfrac{n-1}{2}$ are şi el această proprietate. Tradus în baza 2, asta înseamnă că n are proprietatea dorită dacă $a_j=1$ şi $\overline{a_1a_2\ldots a_{j-1}}_{(2)}$ are proprietatea dorită. Acum se vede uşor inductiv că $f(n)=n$ are loc numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_j=1$, adică dacă $n=2^j-1$.)
Reciproc, efectuând această construcţie în celălalt sens, o inducţie imediată arată că $f(2^k-1)=2^k-1$ pentru orice $k\geq 1$.
Aşadar numerele naturale n căutate sunt cele de forma $n=2^k-1$ cu $k\geq 1$.

b) Ştim că $n\geq 2$. Dacă n este impar, ştim de la a) că piatra care conţine pătrăţelul $(n,1)$ împarte scara în două părţi simetrice, scări de mărime $\dfrac{n-1}{2}$, astfel că $f(n)$ ar fi impar, deci $f(n)-n$ ar fi par, deci diferit de 1. Rămâne că n este par şi atunci piatra care conţine pătrăţelul $(n,1)$ nu conţine pătrăţel superior, deci trebuie să fie singura piatră care nu conţine pătrăţel superior. Fie ℓ dimensiunea acestei pietre. Odată ce am fixat ℓ şi n, dimensiunile pietrelor sunt impuse. În particular, o inducţie imediată după $n+i-j$ arată că pietrele care conţin pătrăţelele (simetice) (i,j) şi $(n+1-j,\, n+1-i)$ ocupă poziţii simetrice. Ne uităm acum la pietrele care conţin pătrăţelele $(n,1)$, $(n-\ell,\,1)$, $(n,\,\ell+1)$ şi $(n-\ell,\,\ell+1)$, cu menţiunea că ultima există numai dacă $n\neq 2\ell$.
Să tratăm mai întâi cazul $n\neq 2\ell$. În acest caz, cele patru pietre sunt disjuncte, de dimensiune ℓ, $\dfrac{n+1-\ell}{2}$, $\dfrac{n+1-\ell}{2}$ şi respectiv $\dfrac{n+1-2\ell}{2}$. Ele împart scara în patru scări mai mici: două de mărime $\dfrac{n-1-\ell}{2}$ şi două de mărime $\dfrac{n-1-2\ell}{2}$.
Conform rezultatului de la a), trebuie atunci să existe numerele naturale nenule k şi k' astfel ca $n=2^k+\ell-1=2^{k'}+2\ell-1$. De aici rezultă că $\ell=2^k-2^{k'}$, deci $k\geq k'$, şi $n=2^{k+1}-2^{k'}-1$.
Reciproc, dacă n este de forma $n=2^{k+1}-2^{k'}-1$ cu $k\geq k'\geq 1$, este suficient să îl alegem pe $\ell=2^k-2^{k'}$ şi construcţia noastră funcţionează.
În cazul în care $n=2\ell$, avem de fapt trei pietre care împart scara în patru scări mai mici de mărime $\dfrac{n-1-\ell}{2}=\dfrac{\ell-1}{2}$, deci, conform a), trebuie să existe un număr natural nenul k astfel încât $\ell=2^k-1$ şi $n=2^{k+1}-2$.
Reciproc, dacă n este de forma $2^{k+1}-2$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, este suficient să îl alegem pe $\ell=\dfrac{n}{2}$ şi construcţia noastră funcţionează.

În concluzie, numerele naturale căutate sunt cele de forma $2^{k+1} - 2^{k'} - 1$, cu $k \geq k' \geq 0$.

4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pentru care

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

oricare ar fi numerele naturale x şi y.
Soluţie:
În continuare, vom nota cu $E_{x,y}$ ecuaţia din enunţ.
Mai întâi, ecuaţia $E_{x,0}$ arată că $xf(0) = xf(x^2)$, adică $f(x^2) = f(0)$ pentru orice număr natural $x \geq 1$. În consecinţă, pentru orice $y \geq 1$, ecuaţia E_{x,y^2} arată că $x + y^2$ divide $x\big(f(0) - f(x)\big)$. Această relaţie de divizibilitate fiind validă chiar şi atunci când y este oricât de mare, deducem că $f(x) = f(0)$ pentru orice x.
Reciproc, se verifică uşor că toate funcţiile constante sunt soluţii ale ecuaţiei.