AL PATRULEA BARAJ DE JUNIORI
Paris, 16 mai 2018

Problema 1. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale pozitive care satisfac

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a \\ b\sqrt{c} - a = b \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

Problema 2. Determinaţi toate perechile (m, n) de numere naturale nenule pentru care

$$m! + n! = m^n.$$

Remarcă. Reamintim că pentru orice număr natural nenul n, numărul $n!$ desemnează produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez în care (AB) şi (CD) sunt paralele. Presupunem că $AD < CD$ şi că $ABCD$ este înscris într-un cerc Γ. Fie $P \in \Gamma$ astfel încât (DP) este paralel cu (AC). Tangenta în D la Γ intersectează a doua oară AB în E, iar coardele $[BP]$ şi $[CD]$ se intersectează în Q. Arătaţi că $EQ = AC$.

Problema 4. Un părat mare, de latură n, este împărţit în n^2 pătrate mici, de latură 1. Vrem să colorăm cu roşu sau albastru fiecare din cele $(n+1)^2$ vârfuri ale pătratelor mici astfel încât fiecare din pătratele mici să aibă exact două vârfuri roşii. În câte moduri se poate face colorarea?

Timp de lucru: 4 ore (14.00 − 18.00)

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale pozitive care satisfac

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a \\ b\sqrt{c} - a = b \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

Soluţie:
Observăm că $a = b = c = 4$ este o soluţie. Vom demonstra că ea este de fapt unica. Dacă două din cele trei numere sunt egale cu 4 (să zicem a şi b), se verifică uşor că şi cel de-al treilea este 4, căci $4\sqrt{4} - c = 4$ implică $c = 4$. Dacă unul dintre numere este egal cu 4 (să zicem că $a = 4$), atunci $c\sqrt{a} - b = c$ devine $2c - b = c$, adică $c = b$. În plus, avem $4\sqrt{b} - b = 4$ care se rescrie $(\sqrt{b} - 2)^2 = 0$, deci $b = 4$ şi $c = 4$. Ne rămâne să arătăm că nu este posibil ca toate cele trei numere să fie diferite de 4. Dacă ele ar fi diferite de 4, atunci am avea fie cel puţin două dintre ele mai mari decât 4, fie am avea cel puţin două mai mici decât 4. Tratăm cele două cazuri separat. Dacă am avea cel puţin două numere mai mari ca 4, să presupunem că c este cel mai mic dintre cele trei numere. Atunci $a, b > 4$, deci $a = a\sqrt{b} - c > 2a - c$, deci $c > a > 4$, ceea ce contrazice minimalitatea lui c.
Similar, dacă cel puţin două dintre numere sunt mai mici decât 4, să presupunem că c este cel mai mare. Atunci $a, b < 4$, deci $a = a\sqrt{b} - c < 2a - c$, adică $c < a$, ceea ce contrazice maximalitatea lui c.
Singura soluţie este aşadar $(4, 4, 4)$.

Problema 2. Determinaţi toate perechile (m, n) de numere naturale nenule pentru care

$$m! + n! = m^n.$$

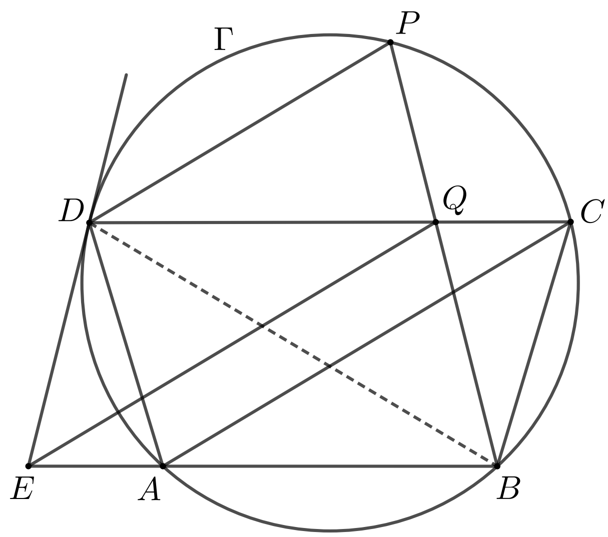
Remarcă. Reamintim că pentru orice număr natural nenul n, numărul $n!$ desemnează produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Soluţie:
Se verifică uşor că perechile $(2, 2)$ şi $(2, 3)$ sunt soluţii. Vom demonstra că sunt singurele.
Începem prin a trata cazurile în care m sau n este egal cu 1 sau 2.
Dacă $m = 1$, atunci $m^n = 1$ dar $m! + n! > 2$, deci nu avem soluţii.
Dacă $m = 2$, ecuaţia devine $2 + n! = 2^n$. Dacă $n \geq 4$, atunci membrul stâng este congruent cu 2 modulo 4, iar membrul drept cu 0, deci trebuie ca n să fie 1, 2 sau 3, iar $n = 1$ nu merge.
Dacă $n = 1$, ecuaţia devine $m! + 1 = m$, dar m divide $m!$ şi m, deci m divide 1, adică $m = 1$, însă $(1, 1)$ nu este soluţie.
În fine, dacă $n = 2$, obţinem $m! + 2 = m^2$. Dar m divide $m!$ şi m^2, deci m divide 2, adică m este 1 sau 2 şi cădem peste cazuri tratate anterior.
Tratăm acum cazul $2 < m \leq n$. În acest caz $m!$ divide $n!$, deci $m!$ divide m^n. În

particular, $m-1$ divide $m!$ deci şi pe m^n, dar $m-1$ este prim cu m, deci şi cu m^n. Deducem că $m-1$ trebuie să fie egal cu 1, adică $m=2$, contradicţie.
În fine, tratăm cazul $2<n<m$. În acest caz $n!$ divide $m!$, deci putem scrie $n!\left(1+\frac{m!}{n!}\right)=m^n$. În particular, $1+\frac{m!}{n!}$ divide m^n. Dar $\frac{m!}{n!}=(n+1)(n+2)\ldots m$ este divizibil cu m, deci $1+\frac{m!}{n!}$ este prim cu m, deci cu m^n. Avem aşadar $1+\frac{m!}{n!}=1$, ceea ce este imposibil.

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez în care (AB) şi (CD) sunt paralele. Presupunem că $AD<CD$ şi că $ABCD$ este înscris într-un cerc Γ. Fie $P\in\Gamma$ astfel încât (DP) este paralel cu (AC). Tangenta în D la Γ intersectează a doua oară AB în E, iar coardele $[BP]$ şi $[CD]$ se intersectează în Q. Arătaţi că $EQ=AC$.

Soluţie:
Ştim că (CQ) este paralel cu (AE), deci cerinţa revine la a arăta că $ACQE$ este un paralelogram, deci este suficient să arătăm că (EQ) şi (AC) sunt paralele. Patrulaterul $BQDE$ este un trapez, cu (BE) şi (DQ) paralele. Vom demonstra mai întâi că este un trapez isoscel. Într-adevăr, avem $m(\sphericalangle EDQ)=m(\sphericalangle EDC)=180^\circ-m(\sphericalangle DAC)$ conform cazului limită al teoremei unghiului înscris. Pe de altă parte, avem $m(\sphericalangle DQB)=180^\circ-m(\sphericalangle BDC)-m(\sphericalangle DBP)=180^\circ-m(\sphericalangle BAC)-m(\sphericalangle DAP)$. Ori patrulaterele $ABCD$ şi $ACPD$ sunt trapeze inscriptibile, deci isoscele, prin urmare $AD=BC$. Rezultă că C este mijlocul arcului BP. Avem, deci, $\sphericalangle BAC\equiv\sphericalangle CAP$, de unde $m(\sphericalangle DQB)=180^\circ-m(\sphericalangle CAP)-m(\sphericalangle DAP)=180^\circ-m(\sphericalangle DAC)=m(\sphericalangle EDQ)$, adică trapezul $EBQD$ este într-adevăr isoscel şi are o axă de simetrie. Deducem că $\sphericalangle DQE\equiv\sphericalangle QDB\equiv\sphericalangle CDB\equiv\sphericalangle DCA$, folosind în final că $ABCD$ are o axă de simetrie. Aceasta arată că (DE) şi (AC) sunt paralele, ceea ce încheie demonstraţia.



Problema 4. Un părat mare, de latură n, este împărţit în n^2 pătrate mici, de latură 1. Vrem să colorăm cu roşu sau albastru fiecare din cele $(n+1)^2$ vârfuri ale pătratelor mici astfel încât fiecare din pătratele mici să aibă exact două vârfuri roşii. În câte moduri se poate face colorarea?

Soluţie:
Răspunsul este $2^{n+2}-2$. Pentru a demonstra acest lucru, începem prin a colora cele $n+1$ vârfuri cele mai de sus. Ele se pot colora în 2^{n+1} moduri. Dacă există două vârfuri consecutive de aceeaşi culoare pe rândul de sus (acest lucru se întâmplă pentru $2^{n+1}-2$ colorări ale rândului de sus), atunci ele fixează culorile din rândul următor [1] şi aşa mai departe pentru fiecare din rândurile următoare. Astfel, se obţin $2^{n+1}-2$ colorări.
Dacă culorile pe primul rând alternează (sunt 2 asemenea colorări ale rândului de sus), atunci trebuie să alternăm culorile şi pe rândul următor, şi aşa mai departe, pe fiecare rând culorile trebuie dispuse alternativ. Putem, pe de altă parte, pentru fiecare rând, să alegem culoarea cu care începem, ceea ce dă $2 \cdot 2^n$ colorări, deci $2^{n+2}-2$ în total.

[1] şi anume fiecare pătrăţel va fi colorat invers faţă de pătrăţelul de deasupra lui; aşadar şi în acest rând există două pătrăţele vecine la fel colorate, deci putem folosi argumentul şi pentru liniile următoare