# AL TREILEA BARAJ DE JUNIORI
# Paris, 28 martie 2018

**Problema 1.** Numerele naturale $1, 2, \ldots, 2018$ sunt scrise pe tablă. Se efectuează 2017 operaţii de felul următor: se aleg două numere de pe tablă, $a$ şi $b$, se şterg şi se scrie pe tablă numărul $a+b+2ab$. La sfârşit, pe tablă rămâne un singur număr. Ce valori poate lua ultima cifră a acestuia?

**Problema 2.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel cu vârful în $A$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 100^\circ$. Fie $D$ piciorul bisectoarei din $B$. Arătaţi că $BC = AD + BD$.

**Problema 3.** Determinaţi toate numerele naturale nenule $k$ şi $\ell$ pentru care $2^k+3^\ell$ este pătrat perfect.

**Problema 4.** Fie $a, b, c, d$ numere reale astfel încât $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$. Arătaţi că

$$ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

*Timp de lucru:* 4 ore (14.00 − 18.00)

**Soluţii oficiale:**

**Problema 1.** Numerele naturale $1, 2, \ldots, 2018$ sunt scrise pe tablă. Se efectuează 2017 operaţii de felul următor: se aleg două numere de pe tablă, $a$ şi $b$, se şterg şi se scrie pe tablă numărul $a+b+2ab$. La sfârşit, pe tablă rămâne un singur număr. Ce valori poate lua ultima cifră a acestuia?

**Soluţie:**
Deoarece de la 1 la 2018 sunt 1009 de numere impare, suma numerelor scrise iniţial pe tablă este impară. În plus, există pe tablă numere congruente cu 2 (mod 5). O inducţie imediată ne permite atunci să arătăm că, după fiecare operaţie, suma numerelor scrise pe tablă rămâne impară şi că (cel puţin) unul dintre numerele de pe tablă este congruent cu 2 (mod 5). În consecinţă, ultimul număr scris pe tablă este congruent cu 1 (mod 2) şi congruent cu 2 (mod 5), deci congruent cu 7 (mod 10).

**Remarcă:** Se poate găsi şi un invariant care să permită aflarea ultimului număr rămas pe tablă (este mereu acelaşi). Dacă $f(n) = 2n + 1$, atunci cantitatea $f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \ldots \cdot f(a_k)$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sunt numerele scrise la un moment dat pe tablă, nu se modifică. Într-adevăr, cum $f(a) \cdot f(b) = (2a + 1)(2b + 1) = 2(a+b+2ab)+1$, înlocuirea lui $a$ şi $b$ pe tablă cu $a+b+2ab$ nu modifică produsul $f$-urilor numerelor de pe tablă. Cum iniţial acesta era $3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 4037$ (număr notat uneori cu $4037!!$), aceasta va fi valoarea şi la sfârşit când pe tablă va rămâne doar un număr, $N$. Astfel, $f(N) = 2N+1 = 4037!!$ implică $N = \frac{4037!!-1}{2}$. Evident ultima cifră a lui $4037!!$ este 5, şi, cum $2j + 1 \equiv (-1)^j \pmod 4$, rezultă că $4037!! \equiv -1 \pmod 4$, deci $4037!!$ are penultima cifră impară. Atunci $N$ va avea ultima cifră 7.

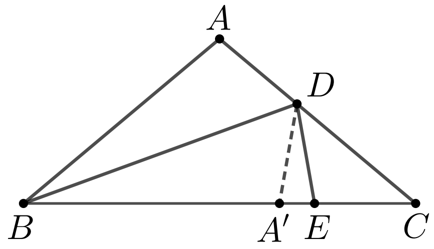
**Problema 2.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel cu vârful în $A$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 100°$. Fie $D$ piciorul bisectoarei din $B$. Arătaţi că $BC = AD + BD$.

**Soluţie:**
Conform teoremei sinusurilor, să observăm că $BD \leq BC$ dacă şi numai dacă $\sin(\sphericalangle BCD) \leq \sin(\sphericalangle BDC)$. Cum $m(\sphericalangle BDC) = 130°$, iar $m(\sphericalangle BCD) = 40°$, avem într-adevăr $BD \leq BC$. Fie $E$ punctul de pe $[BC]$ astfel încât $BE = BD$ şi fie $A'$ simetricul lui $A$ faţă de $BD$. Conform teoremei sinusurilor avem

$$CE = \frac{\sin(\sphericalangle CDE)}{\sin(\sphericalangle ECD)} \cdot DE = \frac{\sin(\sphericalangle CDE)}{\sin(\sphericalangle ECD)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle DA'E)}{\sin(\sphericalangle A'ED)} \cdot A'D =$$

$$\frac{\sin 40° \cdot \sin 80°}{\sin 40° \cdot \sin 80°} \cdot AD = AD.$$

Deducem că $BC = BE + EC = AB + BD$.




**Soluţie alternativă** (sintetică)
Fie $E \in (BC)$ astfel încât $BE = BD$. Atunci $m(\sphericalangle CBD) = 20^\circ$, deci $m(\sphericalangle DEB) = 80^\circ$. Dar $m(\sphericalangle DCE) = 40^\circ$ implică $m(\sphericalangle EDC) = 40^\circ$, deci triunghiul $EDC$ este isoscel, cu $ED = EC$. Să mai observăm că patrulaterul $ABED$ este inscriptibil (unghiurile opuse $\sphericalangle BAD$ şi $\sphericalangle BED$ sunt suplementare), iar coardele $[AD]$ şi $[ED]$, fiind subîntinse de unghiurile congruente $\sphericalangle ABD$ şi $\sphericalangle EBD$, sunt şi ele congruente. Aşadar, $BC = BE + EC = BD + ED = BD + AD$.

**Problema 3.** Determinaţi toate numerele naturale nenule $k$ şi $\ell$ pentru care $2^k + 3^\ell$ este pătrat perfect.

**Soluţie:**
O primă idee este aceea de a considera ecuaţia din enunţ modulo $n$, unde $n$ este un număr nu foarte mare cu proprietatea că nu există prea multe resturi pătratice modulo $n$. În aceste condiţii, $n = 3$ şi $n = 8$ par nişte candidaţi buni deoarece pătratele sunt congruente cu 0 sau 1 modulo 3 şi congruente cu 0, 1 sau 4 modulo 8.
Deoarece $k \geq 1$ şi $\ell \geq 1$, avem $2^k \equiv 1 \pmod 3$ şi $3^\ell \equiv 1 \pmod 8$, ceea ce arată că numerele $k$ şi $\ell$ sunt pare. Notând $a = k/2$, $b = \ell/2$ şi $c = \sqrt{2^k + 3^\ell}$, remarcăm că $(c - 2^a)(c + 2^a)$ este o putere a lui 3.
Deoarece $cmmdc(3,\, c - 2^a,\, c + 2^a)$ divide $cmmdc(3,\, 2^{a+1}) = 1$, unul dintre factorii $c - 3^a$ şi $c + 3^a$ trebuie să fie 1, iar celălalt $3^\ell$. Factorul $c + 3^a$ este acela care este mai mare dintre cei doi, deci $c - 2^a = 1$ şi $c + 2^a = 3^\ell$. Atunci $2^{a+1} = 3^\ell - 1 = 9^b - 1 = (3^b - 1)(3^b + 1)$. Similar, deoarece $3^b - 1$ şi $3^b + 1$ sunt numere pare, iar $cmmdc(2,\, 3^b - 1,\, 3^b + 1)$ divide 2, unul dintre numerele $3^b - 1$ şi $3^b + 1$ este egal cu 2, iar celălalt cu $2^a$. Rezultă că $3^b - 1 = 2$ şi $3^b + 1 = 2^a$, ceea ce arată că $a = 2$ şi $b = 1$, adică $k = 4$ şi $\ell = 2$.
Reciproc, dacă $(k, \ell) = (4, 2)$, atunci avem într-adevăr că $2^k + 3^\ell = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$ este pătrat perfect. Acest lucru arată că perechea $(k, \ell) = (4, 2)$ este unica soluţie a problemei.

**Problema 4.** Fie $a, b, c, d$ numere reale astfel încât $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$. Arătaţi că

$$ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

ShortList JBMO 2017, pb A3 (propusă de România)

**Soluţie:**
O primă idee este aceea de a considera sumele ,,surori" $S_1 = ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3$ şi $S_2 = a^3b + b^3c + c^3d + d^3a$. Constatăm atunci că

$$S_1 - S_2 = (d^3 - b^3)(c - a) + (c^3 - a^3)(b - d) = (d - b)(c - a)(d^2 + bd + b^2 - c^2 - ca - a^2) \geq 0.$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz arată atunci că $S_1^2 \geq S_1S_2 \geq (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2)^2$, de unde concluzia.

**Soluţie alternativă:**
Mai întâi, dacă $a = 0$, este suficient să demonstrăm că $bc^2(c - b) + cd^2(d - c) \geq 0$, ceea ce este imediat. Să presupunem, deci, că $a > 0$. Pentru a scăpa de condiţia $a \leq b \leq c \leq d$, facem o schimbare de variabilă. Fie $x = b/a - 1$, $y = c/b - 1$, $z = d/c - 1$. Ne rămâne să arătăm că dacă $x, y, z \geq 0$, atunci $P(x, y, z) \geq 0$, unde

$$P(x - 1,\, y - 1,\, z - 1) = (x^2 + x^3y^3 + x^3y^4z^3 + yz) - (x + x^3y^2 + x^3y^4z^2 + xy^2z^2).$$

O primă idee este de a verifica dacă nu cumva toţi coeficienţii lui $P(x, y, z)$ sunt nenegativi. Considerând mai întâi puterile cele mai mari în $x$, apoi în $z$, calculăm aşadar:

$$P(x, y, z) = (x+1)^3(y+1)^2\big(y+(y+1)(z+1)^2z\big)+(x+1)^2-(x+1)\big(1+(y+1)^2(z+1)^2\big)$$

$$+ (y + 1)(z + 1) = A(x, y, z)x^2 + B(y, z)x + (y + 1)zC(y, z) + (y + 1)y^2,$$

unde

$$A(x, y, z) = (x + 3)(y + 1)^2\big(y + (y + 1)(z + 1)^2z\big) + 1,$$

$$B(y, z) = (3y^3 + 5y^2 + y) + (y + 1)^2\big(3yz(z + 1)^2 + 3z^3 + 5z^2 + z\big)$$

şi

$$C(y, z) = (y + 1)^2z^2 + (2y + 1)(y + 1)z + y^2,$$

de unde concluzia.