BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2018
23 februarie 2018

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural şi fie n drepte în poziţie generală (adică nicicare două paralele, nicicare trei concurente). Câte triunghiuri formează aceste n drepte?

2. Fie ABC un triunghi şi L, M, N mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$. Să notăm cu d tangenta în A la cercul circumscris lui ABC. Dreapta LM intersectează d în P, iar dreapta LN intersectează d în Q. Arătaţi că dreptele CP şi BQ sunt paralele.

3. Fie p şi n numere naturale nenule, cu p prim şi $n \geq p$. Să presupunem că $1+np$ este un pătrat perfect. Arătaţi că $n+1$ este o sumă de p pătrate perfecte nenule (nu neapărat distincte).

4. Fie n un număr natural nenul. Pentru orice submulţime nevidă A a lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ notăm cu $P(A)$ produsul tuturor elementelor lui A. De exemplu, pentru $A = \{2, 4, 7\}$, avem $P(A) = 56$.
Determinaţi suma numerelor $\dfrac{1}{P(A)}$ când A parcurge mulţimea tuturor submulţimilor nevide ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Timp de lucru: 4 ore

SOLUŢII:

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural şi fie n drepte în poziţie generală (adică nicicare două paralele, nicicare trei concurente). Câte triunghiuri formează aceste n drepte?

Soluţie: Fiecare triunghi este determinat de trei drepte, deci sunt

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

triunghiuri.

2. Fie ABC un triunghi şi L, M, N mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$. Să notăm cu d tangenta în A la cercul circumscris lui ABC. Dreapta LM intersectează d în P, iar dreapta LN intersectează d în Q. Arătaţi că dreptele CP şi BQ sunt paralele.

Soluţie:

Avem $\sphericalangle QAB \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle QLB$, deci patrulaterul $AQBL$ este inscriptibil. Analog, $APCM$ este inscriptibil. Atunci $m(\sphericalangle QBL) = 180° - m(\sphericalangle QAL) = m(\sphericalangle PAL) = 180° - m(\sphericalangle PCL)$, de unde concluzia.

3. Fie p şi n numere naturale nenule, cu p prim şi $n \geq p$. Să presupunem că $1+np$ este un pătrat perfect. Arătaţi că $n+1$ este o sumă de p pătrate perfecte nenule (nu neapărat distincte).

Soluţie: Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $1+pn = k^2$. Atunci $pn = (k-1)(k+1)$, deci $p \mid k-1$ sau $p \mid k+1$. În primul caz putem scrie $k-1 = p\ell$, adică $k = p\ell+1$ şi revenind la $1+pn = k^2$ obţinem $n+1 = p\ell^2+2\ell+1 = (p-1)\cdot\ell^2+(\ell+1)^2$. În cel de-al doilea caz, $k+1 = p\ell$ conduce în mod analog la $n+1 = p\ell^2-2\ell+1 = (p-1)\cdot\ell^2+(\ell-1)^2$.

4. Fie n un număr natural nenul. Pentru orice submulţime nevidă A a lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ notăm cu $P(A)$ produsul tuturor elementelor lui A. De exemplu, pentru $A = \{2, 4, 7\}$, avem $P(A) = 56$.

Determinaţi suma numerelor $\dfrac{1}{P(A)}$ când A parcurge mulţimea tuturor submulţimilor nevide ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soluţie: Avem identitatea $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) = 1+\sum x_i + \sum\limits_{i<j} x_i x_j + \ldots$.

Alegând $x_k = \dfrac{1}{a_k}$ avem $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\sum_{a_1<\ldots<a_k} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = n+1$, adică $1+\sum\limits_A P(A) = n+1$, deci $\sum\limits_A P(A) = n$.