BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2018
10 ianuarie 2018

1. Pentru orice număr natural n notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale în baza 10. Spunem că un număr este „*frumos*" dacă $S(n^2) = S(n)$. Determinaţi toate valorile posibile ale sumei cifrelor unui număr frumos.

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Determinaţi toate numerele reale $x \geq -1$ cu proprietatea că, pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ are loc inegalitatea

$$\frac{a_1 + x}{2} \cdot \frac{a_2 + x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n + x}{2} \leq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + x}{2}.$$

3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Se consideră $2n$ bile. Pe fiecare din aceste bile este scris câte un număr. Presupunem că, oricum am grupa aceste $2n$ bile în n perechi, există două perechi care au aceeaşi sumă.
(a) Arătaţi că patru dintre aceste bile au acelaşi număr.
(b) Arătaţi că pe bile sunt scrise cel mult $n - 1$ numere distincte.

4. Determinaţi toate numerele reale a pentru care există un şir infinit de numere reale pozitive $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ care verifică pentru orice n egalitatea $x_{n+2} = \sqrt{a x_{n+1} - x_n}$.

Timp de lucru: 4 ore