BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2018
10 ianuarie 2018

1. Pentru orice număr natural n notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale în baza 10. Spunem că un număr este ,,*frumos*" dacă $S(n^2) = S(n)$. Determinaţi toate valorile posibile ale sumei cifrelor unui număr frumos.

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Determinaţi toate numerele reale $x \geq -1$ cu proprietatea că, pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ are loc inegalitatea

$$\frac{a_1 + x}{2} \cdot \frac{a_2 + x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n + x}{2} \leq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + x}{2}.$$

3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Se consideră $2n$ bile. Pe fiecare din aceste bile este scris câte un număr. Presupunem că, oricum am grupa aceste $2n$ bile în n perechi, există două perechi care au aceeaşi sumă.
(a) Arătaţi că pe patru dintre bile este scris acelaşi număr.
(b) Arătaţi că pe bile sunt scrise cel mult $n - 1$ numere distincte.

4. Determinaţi toate numerele reale a pentru care există un şir infinit de numere reale pozitive $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ care verifică pentru orice n egalitatea

$$x_{n+2} = \sqrt{a x_{n+1} - x_n}.$$

Timp de lucru: 4 ore

SOLUŢII:

1. Pentru orice număr natural n notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale în baza 10. Spunem că un număr este ,,*frumos*" dacă $S(n^2) = S(n)$. Determinaţi toate valorile posibile ale sumei cifrelor unui număr frumos.

Soluţie:

Deoarece un număr dă acelaşi rest la împărţirea cu 9 ca şi suma cifrelor sale, avem: $n \equiv S(n) \equiv S(n^2) \equiv n^2 \pmod 9$, deci $9 \mid n^2 - n$. Cum $(n, n-1) = 1$, rezultă că $9 \mid n$ sau $9 \mid n-1$, cu alte cuvinte suma cifrelor unui număr frumos este un număr care dă rest 0 sau rest 1 la împărţirea cu 9.

Vom demonstra prin câte un exemplu că orice număr de această formă poate fi suma cifrelor unui număr frumos.

Dacă $S(n) = 0$ putem lua $n = 0$ care este frumos. Dacă $S(n) = 9k$, putem lua $n = \underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}} = 10^k - 1$. Într-adevăr, $n^2 = 10^{2k} - 2\cdot 10^k + 1 = \underbrace{999\ldots9}_{k-1 \text{ cifre}}8\underbrace{000\ldots0}_{k-1 \text{ cifre}}1$ care are suma cifrelor tot $9k$, deci $n = 10^k - 1$ este un număr frumos.

Dacă $S(n) = 9k+1$, $k \in \mathbb{N}$, putem lua $n = 1\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}} = 2\cdot 10^k - 1$. într-adevăr, $n^2 = 4\cdot 10^{2k} - 4\cdot 10^k + 1 = 3\underbrace{999\ldots9}_{k-1 \text{ cifre}}6\underbrace{000\ldots0}_{k-1 \text{ cifre}}1$ care are suma cifrelor tot $9k+1$, deci $n = 2\cdot 10^k - 1$ este un număr frumos.

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Determinaţi toate numerele reale $x \geq -1$ cu proprietatea că, pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ are loc inegalitatea

$$\frac{a_1+x}{2}\cdot\frac{a_2+x}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+x}{2} \leq \frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n + x}{2}.$$

Soluţie:

Alegând $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ şi notând $y = \dfrac{1+a}{2}$ obţinem $y^n \leq y$, deci $y \leq 1$ ceea ce implică $x \in [-1, 1]$.

Arătăm că, reciproc, orice $x \in [-1,1]$ are proprietatea dorită. Vom demonstra inegalitatea prin inducţie.

Pentru $n = 2$ trebie să arătăm că $\dfrac{a_1+x}{2}\cdot\dfrac{a_2+x}{2} \leq \dfrac{a_1\cdot a_2+x}{2}$, $\forall a_1, a_2 \geq 1$, $\forall\, x \in [-1,1]$.

Relaţia revine la $a_1a_2 - a_1x - a_2x + 2x - x^2 \geq 0$, adică la $x^2 + (a_1+a_2-2)x \leq a_1a_2$. Dar $a_1+a_2-2 \geq 0$ şi $x \in [-1,1]$ implică $x^2+(a_1+a_2-2)x \leq 1+(a_1+a_2-1)\cdot 1 \leq a_1a_2$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $(a_1-1)(a_2-1) \geq 0$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ şi $x \in [-1,1]$ şi o demonstrăm pentru $n+1$ numere $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \geq 1$. Notând $a = a_1a_2\ldots a_n \geq 1$, avem $\dfrac{a_1+x}{2}\cdot\dfrac{a_2+x}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_n+x}{2}\cdot\dfrac{a_{n+1}+x}{2} \leq \dfrac{a+x}{2}\cdot\dfrac{a_{n+1}+x}{2} \leq \dfrac{aa_{n+1}+x}{2} = \dfrac{a_1a_2\ldots a_{n+1}+x}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Se consideră $2n$ bile. Pe fiecare din aceste bile este scris câte un număr. Presupunem că, oricum am grupa aceste $2n$ bile în n perechi, există două perechi care au aceeaşi sumă.
(a) Arătaţi că pe patru dintre bile este scris acelaşi număr.
(b) Arătaţi că pe bile sunt scrise cel mult $n-1$ numere distincte.
Soluţie:
(a) Dacă pe bile sunt scrise numerele $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{2n}$, formăm perechile $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$, $\ldots$, $\{a_{2n-1}, a_{2n}\}$. Evident, avem $a_1 + a_2 \leq a_3 + a_4 \leq \ldots \leq a_{2n-1} + a_{2n}$. Cum printre sume există două egale, vor exista şi două consecutive egale, $a_{2j-1} + a_{2j} = a_{2j+1} + a_{2j+2}$. Dar cum $a_{2j-1} \leq a_{2j} \leq a_{2j+1} \leq a_{2j+2}$, rezultă că trebuie să avem egalitate peste tot adică $a_{2j-1} = a_{2j} = a_{2j+1} = a_{2j+2}$.
(b) Presupunem că ar exista n valori distincte $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ scrise pe bile. Aranjăm şi celelalte numere (egale sau nu cu celelalte n) în ordine crescătoare: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$. Formând grupele $\{b_1, c_1\}$, $\{b_2, c_2\}$, $\ldots$, $\{b_b, c_n\}$, obţinem sumele distincte $b_1 + c_1 < b_2 + c_2 < \ldots b_n + c_n$, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar putem avea cel mult $n-1$ valori distincte.

4. Determinaţi toate numerele reale a pentru care există un şir infinit de numere reale pozitive $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ care verifică pentru orice n egalitatea

$$x_{n+2} = \sqrt{ax_{n+1} - x_n}.$$

Soluţie:
Dacă $a > 1$ putem lua şirul constant egal cu $a-1$. Presupunem $a \leq 1$. Este evident că este necesar ca $a > 0$. Din condiţia de existenţă a radicalului (şi din $x_{n+2} > 0$) rezultă că $ax_{n+1} - x_n > 0$. Atunci $0 < ax_{n+1} - x_n \leq x_{n+1} - x_n$, deci şirul (x_n) este crescător. Atunci $x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \sqrt{x_{n+1} - x_n} < \sqrt{x_{n+1}}$, deci $x_n < 1$, $\forall n \geq 2$. În plus, $x_{n+1}^2 \leq x_{n+1} - x_n$ implică $x_{n+1} \geq x_{n+1}^2 + x_n \geq x_0 x_n + x_n = (1 + x_0)x_n$. De aici rezultă $x_n \geq (1 + x_0)^n x_0$, $\forall n$, ceea ce contrazice $x_n \leq 1$, $\forall n$. Prin urmare în cazul $a \leq 1$ nu există şiruri cu proprietatea din enunţ.