BARAJE JBMO FRANŢA 2017
Al patrulea baraj pentru JBMO, Paris, 3 mai 2017

1. Dispunem de 100 de cartonaşe. Pe fiecare din ele sunt scrise două numere naturale consecutive astfel încât fiecare din numerele naturale $1, 2, \ldots, 200$ să fie scris pe unul din cartonaşe.
a) Alice a ales 21 de cartonaşe la întâmplare. Ea face suma tuturor numerelor scrise pe acestea şi îi spune lui Bob că această sumă face 2004. Demonstraţi că Alice a greşit calculul.
b) Alice reface calculul şi anunţă că suma este 2005. Demonstraţi că Alice a greşit din nou calculul.
c) De fapt, totalul corect al lui Alice este 2003. Între timp, Bob a ales la întâmplare 20 de cartonaşe dintre cele rămase. El face suma tuturor numerelor de pe cartonaşele sale şi o anunţă pe Alice că rezultatul este 1396. Demonstraţi că Bob a greşit calculul.

2. Fie $n \geq 2$ şi $k \geq 2$ două numere naturale.Fie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ numere naturale astfel încât $n \geq a_1 > a_2 > \ldots > a_k > 0$ şi $c.m.m.m.c.(a_i, a_j) \leq n$ pentru orice i şi j. Demonstraţi că $ia_i \leq n$ pentru $i = 1, 2, \ldots, k$.

3. Fie ABC un triunghi. Fie D şi E două puncte ale lui $[AC]$ astfel încât D se află între C şi E. Fie F intersecţia cercului circumscris lui ABD cu paralela prin E la BC astfel încât E şi F sunt în semiplane diferite determinate de AB. Fie G intersecţia cercului circumscris lui BCD cu paralela prin E la AB astfel încât E şi G să se afle în semiplane diferite determinate de BC. Demonstraţi că punctele D, E, F, G sunt conciclice.

4. Determinaţi valoarea maximă a expresiei $(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$ pentru x, y, z numere reale cu proprietatea că $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.