BARAJE JBMO FRANŢA 2017
Al treilea baraj pentru JBMO, Paris, 22 martie 2017

1. Fie $\mathscr{C}$ un cerc de centru O şi M un punct exterior cercului. Fie A un punct de pe de $\mathscr{C}$ astfel încât dreapta MA să fie tangentă la cerc. Fie B şi C două puncte ale cercului $\mathscr{C}$ astfel încât B să aparţină segmentului $[AC]$. Fie H proiecţia lui A pe $[MO]$ şi K intersecţia lui $[MO]$ cu cercul $\mathscr{C}$. Demonstraţi că $(BK$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle HBM$.

2. Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} \geq 9 + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

3. $2n+1$ puncte sunt dispuse pe un cerc. n dintre acestea se colorează cu albastru, n cu roşu, iar ultimul cu negru. Spunem că un segment este *amical* dacă extremităţile sale sunt un punct roşu şi unul albastru. Demonstraţi că se pot trasa n segmente care nu se intersectează şi care au capetele în câte două din cele $2n+1$ puncte, astfel încât niciunul din aceste segmente să nu fie amical.

4. Determinaţi toate tripletele (x, y, p) de numere naturale cu proprietatea că p este un număr prim şi că $x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12y$.

Timp de lucru: 4 ore