BARAJE JBMO FRANŢA 2017

Al doilea baraj pentru JBMO, 15 februarie 2017[1]

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{aligned} x_1(x_1-1) &= x_2-1 \\ x_2(x_2-1) &= x_3-1 \\ &\dots \\ x_{2016}(x_{2016}-1) &= x_{2017}-1 \\ x_{2017}(x_{2017}-1) &= x_1-1. \end{aligned}$$

2. Fie a şi b numere naturale nenule. Arătaţi că dacă numărul $a+\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{b}$ este natural, atunci el este pătrat perfect.

3. Se consideră 2017 drepte în plan care se intersectează două câte două în puncte distincte. Notăm cu E mulţimea acestor puncte de intersecţie. Vrem să colorăm fiecare din punctele din E astfel încât oricare două din aceste puncte, dacă se află pe o aceeaşi dreaptă (din cele 2017) şi segmentul determinat de ele nu conţine alte puncte din E, atunci cele două puncte sunt colorate diferit.
Care este numărul minim de culori necesar pentru a putea face o asemenea colorare?

4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Înălţimile $[AA_1]$, $[BB_1]$ şi $[CC_1]$ se intersectează în punctul H. Fie A_2 simetricul lui A faţă de B_1C_1 şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
a) Demonstraţi că punctele O, A_2, B_1 şi C sunt conciclice.
b) Demonstraţi că O, H, A_1 şi A_2 sunt conciclice.

Timp de lucru: 4 ore

[1] Barajul a avut pondere 25% în selecţia echipei Franţei.

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{aligned} x_1(x_1-1) &= x_2-1 \\ x_2(x_2-1) &= x_3-1 \\ &\dots \\ x_{2016}(x_{2016}-1) &= x_{2017}-1 \\ x_{2017}(x_{2017}-1) &= x_1-1. \end{aligned}$$

Soluţie:
Să facem convenţia că $x_{2018} = x_1$. Atunci, pentru orice $j = \overline{1, 2017}$, avem că $x_{j+1} - x_j = x_j(x_j-1) + 1 - x_j = (x_j-1)^2 \geq 0$, deci $x_1 = x_{2018} \geq x_{2017} \geq \ldots \geq x_1$. Aşadar toate numerele sunt egale, deci $0 = x_{j+1} - x_j = (x_j-1)^2$, adică $x_j = 1$, $\forall\, j = \overline{1, 2017}$.
Reciproc, este evident că $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2017} = 1$ este soluţie a sistemului.

2. Fie a şi b numere naturale nenule. Arătaţi că dacă numărul $a + \dfrac{b}{a} - \dfrac{1}{b}$ este natural, atunci el este pătrat perfect.
Soluţie:
Înmulţind cu a obţinem că $a^2 + b - \dfrac{a}{b}$ este întreg, deci $k = \dfrac{a}{b}$ este întreg. Analog, înmulţind cu b, deducem că $\dfrac{b^2}{a}$ este număr întreg. Cum $\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{b}{k}$, există $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b = ck$. Cum $\dfrac{b}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{ck}$ este număr întreg, înmulţind cu k deducem că şi $\dfrac{1}{c}$ este întreg, adică $c = 1$. Atunci $b = k$ şi $a = k^2$, deci $a + \dfrac{b}{a} - \dfrac{1}{b} = k^2$ este pătrat perfect.

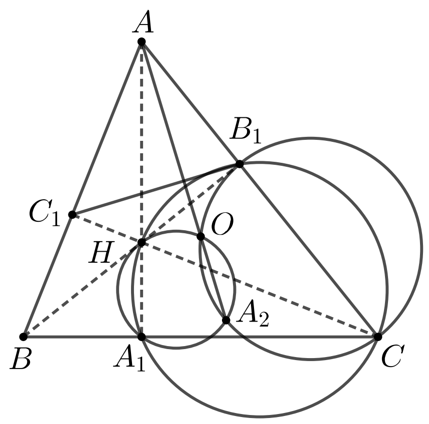
3. Se consideră 2017 drepte în plan care se intersectează două câte două în puncte distincte. Notăm cu E mulţimea acestor puncte de intersecţie. Vrem să colorăm fiecare din punctele din E astfel încât oricare două din aceste puncte, dacă se află pe o aceeaşi dreaptă (din cele 2017) şi segmentul determinat de ele nu conţine alte puncte din E, atunci cele două puncte sunt colorate diferit.
Care este numărul minim de culori necesar pentru a putea face o asemenea colorare?
Soluţie:
Vom arăta că numărul minim de culori este 3 şi că rezultatul rămâne valabil pentru orice număr $n \geq 3$ de drepte.
Mai întâi să remarcăm că în configuraţia obţinută trebuie să avem o regiune triunghiulară netraversată de alte drepte. Într-adevăr, trei drepte care nu sunt nicicare două paralele se intersectează formând un triunghi. Orice dreaptă care intersectează triunghiul îl împarte pe acesta într-o zonă triunghiulară şi una patrulateră. Vom obţine astfel o nouă zonă triunghiulară şi, trasând succesiv celelalte 2014 drepte, vom rămâne mereu cu o suprafaţă triunghiulară. Vârfurile acestui triunghi trebuie colorate cu culori diferite, deci avem nevoie de cel puţin 3 culori.

Vom încheia demonstraţia construind o colorare adecvată cu 3 culori. Având un număr finit de puncte, putem alege un reper ortogonal în care axa ordonatelor nu este paralelă cu niciuna din cele 2017 drepte. Atunci abscisele punctelor din E vor fi două câte două diferite. Putem atunci nota punctele din E în ordinea crescătoare a absciselor: M_1, M_2, ..., M_k, unde $k = \dfrac{2017 \cdot 2016}{2}$. Pentru orice j, punctul M_j are cel mult 4 vecini (puncte cu care este unit printr-un segment care nu conţine alte puncte din E). Dacă M_a şi M_b sunt doi dintre vecinii lui M_j şi $M_j \in (M_a, M_b)$, atunci exact unul dintre punctele M_a şi M_b are abscisa mai mică decât cea a lui M_j. Prin urmare, cel mult doi dintre vecinii unui punct M_j au abscisa mai mică decât acesta. Putem atunci colora inductiv, în ordinea numerotării punctelor. Colorăm M_1 cu verde şi M_2 cu roşu. Fie $3 \leq j \leq k$. Presupunem că punctele $M_1, M_2, \ldots, M_{j-1}$ au fost deja colorate cu verde, roşu sau albastru astfel încât nicicare două puncte vecine să nu fi fost colorate (încă) cu o aceeaşi culoare. Conform observaţiei de mai sus, cel mlt doi dintre vecinii lui M_j au fost coloraţi până acum. Putem atunci colora punctul M_j cu o culoare diferită de cea a vecinilor săi deja coloraţi.

4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Înălţimile $[AA_1]$, $[BB_1]$ şi $[CC_1]$ se intersectează în punctul H. Fie A_2 simetricul lui A faţă de B_1C_1 şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
a) Demonstraţi că punctele O, A_2, B_1 şi C sunt conciclice.
b) Demonstraţi că O, H, A_1 şi A_2 sunt conciclice.
Soluţie:
a) A, H, B_1, C_1 sunt conciclice (sunt pe cercul de diametru $[AH]$), deci

$$m(\sphericalangle AB_1C_1) = m(\sphericalangle AHC_1) = 90^\circ - m(\sphericalangle C_1AH).$$

Dar $AA_2 \perp B_1C_1$, deci $\sphericalangle A_2AB_1 \equiv \sphericalangle C_1AH$, adică semidreptele $(AH$ şi $(AA_2$ sunt izogonale în unghiul $\sphericalangle BAC$ (adică sunt simetrice faţă de bsecitoarea acestuia). Deducem că $A_2 \in (AO$. Dar $AO = CO$ implică $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle CAO \equiv \sphericalangle AA_2B_1$, deci O, A_2, B_1 şi C sunt conciclice.
b) Din puterea punctului A faţă de cercurile circumscrise patrulaterelor B_1OA_2C şi CA_1HB_1 avem $AB_1 \cdot AC = AO \cdot AA_2$ şi $AB_1 \cdot AC = AH \cdot AA_1$. Deducem că $AO \cdot AA_2 = AH \cdot AA_1$ şi, din reciproca teoremei puterii punctului, rezultă că punctele O, A_2, A_1 şi H sunt conciclice.
Remarcă: Ipoteza de triunghi ascuţitunghic nu este necesară.


A
B_1
C_1
O
H
A_2
B
A_1
C