BARAJE JBMO FRANŢA 2017
Primul baraj pentru JBMO, 4 ianuarie 2017[1]

1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(a^2) - f(b^2) \leq \big(f(a) + b\big)\big(a - f(b)\big), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Fie S mulţimea numerelor de două cifre care nu conţin cifra 0. Două numere din S se numesc *prietene* dacă cifrele lor cele mai mari sunt egale, iar cifrele lor cele mai mici diferă prin 1. De exemplu, 68 şi 85 sunt prietene, 78 şi 88 sunt prietene, dar 58 şi 75 nu sunt prietene.
Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care există o submulţime T a lui S formată din m numere, nicicare două dintre numerele din T nefiind prietene.

3. Fie $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - x + 1$. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $P(3^n)$ să nu fie număr prim.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în C. Fie D piciorul înălţimii din C, iar Z acel punct de pe $[AB]$ pentru care $AC = AZ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează (CB) şi (CZ) în X şi respectiv Y. Arătaţi că punctele B, X, Y, D sunt conciclice.

Timp de lucru: 4 ore

[1] Barajul a avut pondere 25% în selecţia echipei Franţei.

1. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(a^2)-f(b^2)\leq \big(f(a)+b\big)\big(a-f(b)\big),\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}.$$

Soluţie:
• Alegând $a=b=0$ obţinem $f^2(0)\leq 0$, adică $f(0)=0$.
• Alegând $a=x$, $b=0$ şi apoi $a=0$, $b=x$ obţinem $f(x^2)=xf(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
• Înlocuind în relaţia din enunţ, obţinem $af(a)-bf(b)\leq \big(f(a)+b\big)\big(a-f(b)\big)$, adică $f(a)f(b)\leq ab,\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$.
• Pe de altă parte, $xf(x)=f(x^2)=-xf(-x)$ implică f impară. Înlocuind b cu $-b$ în relaţia $f(a)f(b)\leq ab$ obţinem $f(a)f(b)\geq ab$, $\forall\, a,b$, adică $f(a)f(b)=ab$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.
• Dar $f^2(1)=1$ implică $f(1)=1$ sau $f(1)=-1$, deci $f(a)f(1)=a$ implică $f(a)=a$, $\forall\, a\in\mathbb{R}$ sau $f(a)=-a$, $\forall\, a\in\mathbb{R}$.
• Ambele funcţii satisfac relaţia din enunţ.

2. Fie S mulţimea numerelor de două cifre care nu conţin cifra 0. Două numere din S se numesc *prietene* dacă cifrele lor cele mai mari sunt egale, iar cifrele lor cele mai mici diferă prin 1. De exemplu, 68 şi 85 sunt prietene, 78 şi 88 sunt prietene, dar 58 şi 75 nu sunt prietene.
Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care există o submulţime T a lui S formată din m numere, nicicare două dintre numerele din T nefiind prietene.
Soluţie:
Răspunsul este 45. Putem considera T mulţimea elementelor din S care au cifra mai mică impară. Această mulţime are exact 45 de elemente.
Pe de altă parte, dacă $x=\overline{ab}$, cu $1\leq b<a\leq 9$, atunci x şi $x+1$ sunt prietene. În plus, dacă $2\leq a<b\leq 9$ şi a este par, atunci $x=\overline{ab}$ şi $x+10$ sunt prietene. Astfel am găsit 36 de perechi disjuncte de numere prietene. În consecinţă, dintre cele 72 de numere mai mari sau egale cu 21, T poate conţine cel mult 36, deci T are cel mult $9+36=45$ de elemente.

3. Fie $P(x)=x^4-x^3-3x^2-x+1$. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $P(3^n)$ să nu fie număr prim.
Soluţie:
Observăm că $3^2\equiv -1 \pmod 5$ şi $3^4\equiv 1 \pmod 5$. Fie $n\geq 1$ şi $x=3^{4m+1}$. Atunci $x=(3^4)^m\cdot 3\equiv 3 \mod 5$, deci $P(x)\equiv 3^4-3^3-3^3-3+1\equiv 1+3+3-3+1\equiv 0 \pmod 5$.
Pe de altă parte, $P(x)>x^4-x^3-3x^3-x^3=x^3(x-5)>x-5>3^{4m}-5>5$, deci $P(3^{4m+1})$ nu este număr prim.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în C. Fie D piciorul înălţimii din C, iar Z acel punct de pe $[AB]$ pentru care $AC=AZ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează (CB) şi (CZ) în X şi respectiv Y. Arătaţi că punctele B,X,Y,D sunt conciclice.

Soluţie:
Triunghiul CAZ este isoscel, deci bisectoarea $[AY]$ este şi înălţime. Atunci patrulaterul $CADY$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle DYX) = 180° - m(\sphericalangle AYD) = 180° - m(\sphericalangle ACD) = 180° - m(\sphericalangle XBD)$, de unde concluzia.