

BARAJE JBMO FRANȚA 2016
Al treilea baraj pentru JBMO, Paris, 23 martie 2016

1. Determinați toate numerele naturale nenule n care sunt suma a doi divizori ai lui $n + 6$.

2. Un punct P este situat în exteriorul unui cerc Ω . Notăm cu A și B punctele de contact ale celor două tangente din P cu cercul. Fie M mijlocul lui $[BP]$. Dreapta AM taie din nou cercul în punctul C , iar dreapta PC taie din nou cercul în punctul D . Demonstrați că dreptele AD și BP sunt paralele.

3. Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătați că

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} > 2.$$

4. Pe un drum orizontal care mărginește o râpă se află n temple. Fiecare din aceste temple este păzit de doi elefanți care stau cu spatele la templu, unul lângă templu, în stânga acestuia, celălalt lângă templu, în dreapta acestuia. Acești $2n$ elefanți sunt de mărimi distincte. Atunci când un elefant se deplasează de-a lungul drumului, el calcă în picioare orice elefant care stă cu spatele la el. În schimb, atunci când doi elefanți se întâlnesc față în față, elefantul mai mic va fi mereu călcat în picioare de elefantul mai mare. Un elefant se deplasează întotdeauna în aceeași direcție până când este, eventual, călcat în picioare de un altul (și, în acest caz, el cade în râpă fără posibilitatea de a se întoarce). Arătați că există un templu t astfel încât, pentru orice elefant e , dacă e se pune în mișcare și toți ceilalți rămân immobili, e nu va putea ajunge la templul t .

Timp de lucru: 4 ore