BARAJE JBMO FRANŢA 2016
Al doilea baraj pentru JBMO, 26 februarie 2016

1. Fiecare din pătrăţelele unitate ale unei table 10×10 se colorează cu alb sau cu negru. O colorare se numeşte *omogenă* dacă ea conţine un pătrat 3×3 monocolor şi se numeşte *neomogenă* în caz contrar. Demonstraţi că există mai multe colorări neomogene decât omogene.

2. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive care verifică $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c} \geq \frac{69}{4}.$$

3. Fie ABC un triunghi şi M mijlocul lui $[BC]$. Notăm cu I_b şi I_c centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AMB şi AMC. Demonstraţi că al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor AI_bB şi AI_cC se găseşte pe dreapta AM.

4. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Presupunem că există exact 2005 perechi (x, y) de numere naturale nenule care satisfac egalitatea $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{n}$. Demonstraţi că n este pătrat perfect.
Notă: Dacă $x \neq y$, atunci $(x, y) \neq (y, x)$.

Timp de lucru: 4 ore

1. Fiecare din pătrăţelele unitate ale unei table 10×10 se colorează cu alb sau cu negru. O colorare se numeşte *omogenă* dacă ea conţine un pătrat 3×3 monocolor şi se numeşte *neomogenă* în caz contrar. Demonstraţi că există mai multe colorări neomogene decât omogene.
Soluţie:
Există 2^{100} colorări ale tablei 10×10.
Fie p un pătrat 3×3. Numărul de colorări pentru care p este monocolor este $2 \cdot 2^{91}$. Există 64 de moduri de a alege pătratul p, deci există cel mult $64 \cdot 2 \cdot 2^{91} = 2^{98}$ colorări omogene, adică mai puţin de jumătate din total (de fapt chiar mai puţine de un sfert sunt omogene).

2. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive care verifică $a+b+c = 1$, atunci

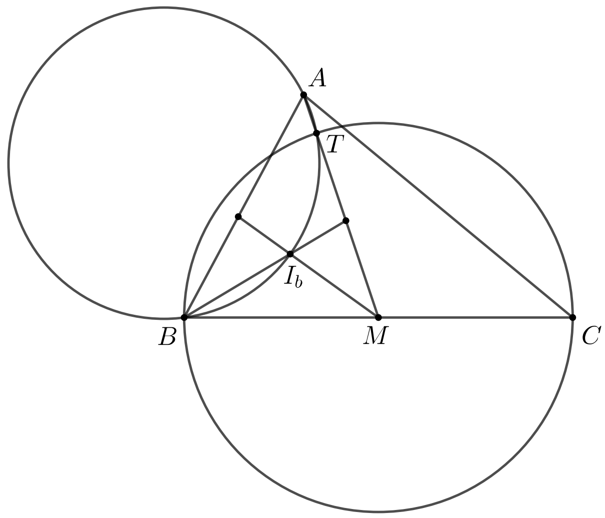
$$\frac{7+2b}{1+a} + \frac{7+2c}{1+b} + \frac{7+2a}{1+c} \geq \frac{69}{4}.$$

Soluţie:
Deoarece $7 + 2b = 5 + 2(1 + b)$, putem scrie membrul stâng

$$5\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) + 2\left(\frac{1+b}{1+a} + \frac{1+c}{1+b} + \frac{1+a}{1+c}\right).$$

Folosind inegalitatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, minorăm primul termen cu $\frac{45}{4}$.
Folosind inegalitatea $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, minorăm termenul al doilea cu 6.
Prin adunare, se obţine inegalitatea cerută. Egalitatea are loc dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3. Fie ABC un triunghi şi M mijlocul lui $[BC]$. Notăm cu I_b şi I_c centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AMB şi AMC. Demonstraţi că al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor AI_bB şi AI_cC se găseşte pe dreapta AM.
Soluţie:
Fie T punctul de intersecţie al semidreptei $(MA$ cu cercul de diametru $[BC]$. Este suficient să arătăm că T se află pe cercul circumscris triunghiului AI_bB (rolurile lui B şi C fiind simetrice, acest lucru va arăta şi că T se află pe cercul circumscris lui AI_cC). Unghiul $\sphericalangle BTC$ este drept, deci $m(\sphericalangle ATB) = 90^\circ + \frac{1}{2} m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle AI_bB)$, de unde concluzia. (Asta dacă $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$; în caz contrar argumentele sunt similare.)



4. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Presupunem că există exact 2005 perechi (x, y) de numere naturale nenule care satisfac egalitatea $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{n}$. Demonstraţi că n este pătrat perfect.

Notă: Dacă $x \neq y$, atunci $(x, y) \neq (y, x)$.

Soluţie:

Observăm că $x > n$ şi $y > n$. Ecuaţia se scrie $xy = n(x + y)$ sau $(x - n)(y - n) = n^2$. Deducem că există exact 2005 perechi (u, v) de numere naturale astfel încât $n^2 = uv$.

Dacă $n^2 = uv$, atunci u este un divizor al lui n^2. Reciproc, dacă u este un divizor al lui n^2, atunci condiţia $n^2 = uv$ îl determină pe v în mod unic. Deducem că n^2 are exact 2005 divizori.

Fie $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ descompunerea în factori primi a lui n. Atunci $n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \ldots p_k^{2a_k}$ are $(2a_1{+}1)(2a_2{+}1)\ldots(2a_k{+}1)$ divizori. Cum $2005 = 5 \cdot 401$, avem fie $k = 1$ şi $2a_1{+}1 = 2005$, adică $a_1 = 1002$, fie $k = 2$ şi $\{2a_1{+}1,\ 2a_2{+}1\} = \{5,\ 401\}$, adică $\{a_1, a_2\} = \{2,\ 200\}$. Obţinem că $n = p_1^{1002}$ sau $n = p_1^2 \cdot p_2^{200}$, adică n este oricum pătrat perfect.