# BARAJE JBMO FRANŢA 2016
## Primul baraj pentru JBMO, 6 ianuarie 2016

**1.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel cu vârful în $A$, cu $m(\sphericalangle A) \neq 90°$. Fie $D$ punctul de pe $BC$ pentru care $AD \perp AB$. Fie $E$ proiecţia lui $D$ pe $AC$. În fine, fie $H$ mijlocul lui $[BC]$. Demonstraţi că $AH = HE$.

**2.** Determinaţi toate numerele naturale nenule $m$ şi $n$ pentru care $\dfrac{5^m + 2^{n+1}}{5^m - 2^{n+1}}$ este pătratul unui număr natural.

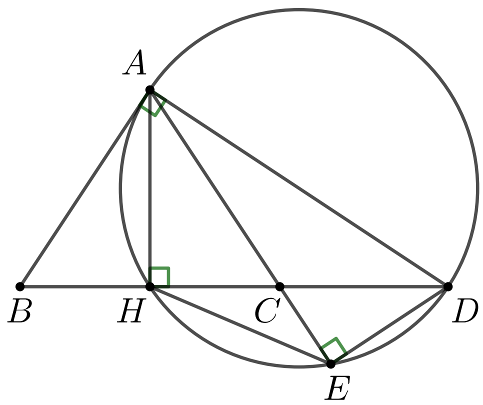
**3.** Se consideră 7 insule, $A_1$, $A_2$, …, $A_7$. Avem voie să construim poduri între o insulă $A_i$ şi cea următoare, $A_{i+1}$ (pentru $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$), precum şi poduri între o insulă $A_i$ (cu $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$) şi ultima insulă, $A_7$. Dorim să legăm insulele cu numărul minim de poduri astfel încât să se poată ajunge de pe orice insulă pe oricare altă insulă. În câte moduri se pot alege podurile care se vor construi?
De exemplu, dacă am avea 3 insule în loc de 7, numărul minim de poduri ar fi 2, iar alegerea celor două poduri poate fi făcută în 3 moduri:
1) un pod între $A_1$ şi $A_2$ şi un altul între $A_2$ şi $A_3$
2) un pod între $A_1$ şi $A_2$ şi un altul între $A_1$ şi $A_3$
3) un pod între $A_1$ şi $A_3$ şi un altul între $A_2$ şi $A_3$.

**4.** Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x + y) = f(x - y) + f\big(f(1 - xy)\big), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

*Timp de lucru: 4 ore*

**1.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel cu vârful în $A$, cu $m(\sphericalangle A) \neq 90^\circ$. Fie $D$ punctul de pe $BC$ pentru care $AD \perp AB$. Fie $E$ proiecţia lui $D$ pe $AC$. În fine, fie $H$ mijlocul lui $[BC]$. Demonstraţi că $AH = HE$.
*Soluţie:*
Unghiurile $\sphericalangle AHD$ şi $\sphericalangle AED$ fiind drepte, punctele $A, D, H, E$ sunt conciclice (pe cercul de diametru $[AD]$).
Apoi, $m(\sphericalangle HAE) = 90^\circ - m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADH)$.
Cum $D$ şi $E$ sunt de aceeaşi parte a lui $AH$, din conciclicitatea punctelor $A, D, H, E$ rezultă că $\sphericalangle ADH \equiv \sphericalangle AEH$.
În concluzie, avem $\sphericalangle HAE \equiv \sphericalangle HEA$, deci $AH = HE$.




**2.** Determinaţi toate numerele naturale nenule $m$ şi $n$ pentru care $\dfrac{5^m + 2^{n+1}}{5^m - 2^{n+1}}$ este pătratul unui număr natural.
*Soluţie:*
Numărul $5^m - 2^{n+1}$ trebuie să dividă $5^m + 2^{n+1}$, deci şi diferenţa $(5^m + 2^{n+1}) - (5^m - 2^{n+1}) = 2^{n+2}$, prin urmare trebuie să fie o putere a lui 2. Pe de altă parte, $5^m - 2^{n+1}$ este impar, deci trebuie ca $5^m - 2^{n+1} = 1$ şi $5^m + 2^{n+1} = a^2$, cu $a \in \mathbb{N}$. Din $(a-1)(a+1) = a^2 - 1 = 2^{n+2}$ rezultă că $a-1$ şi $a+1$ trebuie să fie puteri ale lui 2. Dar singurele puteri ale lui 2 care diferă prin 2 sunt 2 şi 4, deci $a - 1 = 2$, $a + 1 = 4$, adică $a = 3$. Atunci $2^{n+2} = 8$, implică $n = 1$, apoi $m = 1$.
În concluzie, $m = n = 1$ este singura soluţie a problemei.

**3.** Se consideră 7 insule, $A_1$, $A_2$, ..., $A_7$. Avem voie să construim poduri între o insulă $A_i$ şi cea următoare, $A_{i+1}$ (pentru $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$), precum şi poduri între o insulă $A_i$ (cu $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$) şi ultima insulă, $A_7$. Dorim să legăm insulele cu numărul minim de poduri astfel încât să se poată ajunge de pe orice insulă pe oricare altă insulă. În câte moduri se pot alege podurile care se vor construi?
De exemplu, dacă am avea 3 insule în loc de 7, numărul minim de poduri ar fi 2, iar alegerea celor două poduri poate fi făcută în 3 moduri:

1) un pod între $A_1$ şi $A_2$ şi un altul între $A_2$ şi $A_3$
2) un pod între $A_1$ şi $A_2$ şi un altul între $A_1$ şi $A_3$
3) un pod între $A_1$ şi $A_3$ şi un altul între $A_2$ şi $A_3$.

*Soluţie:*

Vom demonstra pentru început că numărul minim de poduri este 6. În general, dacă sunt $n$ insule, este nevoie de cel puţin $n-1$ poduri. Ne uităm deocamdată numai la poduri de primul fel, care unesc insule cu indici consecutivi. (Podul dintre $A_{n-1}$ şi $A_n$ nu îl considerăm ca fiind de acest fel.) Aceste poduri împart insulele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ în $k$ grupe formate din minim o insulă, insulele dintr-un grup fiind deja conectate prin poduri. Dacă am pune şi cele $k-1$ poduri (de primul fel) care lipsesc, am avea $n-2$ poduri, deci în total avem $n-k-1$ poduri de primul fel. Apoi, fiecare grup de insule trebuie unit cu $A_n$, deci mai sunt necesare încă $k$ poduri de al doilea fel (care au un capăt pe insula $A_n$. În total sunt necesare $n-1$ poduri. Acest număr este suficient (putem, de pildă, rezolva circulaţia folosind $n-1$ poduri de forma $A_iA_{i+1}$, sau, din contră, folosind $n-1$ poduri de tipul $A_iA_n$).

Să notăm cu $a_n$ numărul de moduri în care putem uni $n$ insule cu $n-1$ poduri. Evident, $a_1 = a_2 = 1$ şi, aşa cum arată exemplul din enunţ, $a_3 = 3$. Să considerăm acum $n$ insule, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dacă $A_{n-1}$ nu este unit cu $A_n$, putem suprima insula $A_{n-1}$ şi, dintr-o configuraţie bună pentru $n$ insule, obţinem o configuraţie bună cu $n-1$ insule. Reciproc, din orice configuraţie bună cu cu $n-1$ insule, putem intercala o insulă între ultimele două şi să o unim cu $A_{n-2}$. Prin urmare, fiecare configuraţie convenabilă pentru $n$ insule în care ultimele două insule nu sunt unite cu un pod, provine dintr-o configuraţie convenabilă cu $n-1$ insule. Aşadar sunt exact $a_{n-1}$ configuraţii bune în care $A_{n-1}$ şi $A_n$ nu sunt unite.

Pentru orice configuraţie în care $A_{n-1}$ şi $A_n$ sunt unite există $k \geq 1$ astfel încât $A_n$ este unit cu $A_{n-1}$, $A_{n-1}$ este unit cu $A_{n-2}$, ş.a.m.d., $A_{n-k+1}$ este unit cu $A_{n-k}$ dar $A_{n-k}$ nu este unit cu $A_{n-k-1}$. Putem atunci suprima insulele $A_{n-k}$, $A_{n-k+1}$, $\ldots$, $A_{n-1}$ şi obţine o configuraţie bună cu $n-k$ insule. Reciproc, oricărei configuraţii bune cu $n-k$ insule îi putem adăuga un lanţ format din $k$ insule pe care să le unim cu $A_n$. Aşadar sunt $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ configuraţii bune în care $A_n$ şi $A_{n-1}$ sunt unite, deci $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$.

Folosind această relaţie de recurenţă, calculăm succesiv: $a_4 = 8$, $a_5 = 21$, $a_6 = 55$, $a_7 = 144$. Aşadar răspunsul la problema noastră este 144.

**4.** Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x+y) = f(x-y) + f\big(f(1-xy)\big), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

*Soluţie:*

Punem $y = 0$ şi obţinem că $f(x) = f(x) + f\big(f(1)\big)$, adică $f\big(f(1)\big) = 0$.

Punem $x = 0$ şi obţinem că $f$ trebie să fie pară.

Pentru $y = 1$ obţinem $f(x+1) = f(x-1) + f\big(f(1-x)\big)$, apoi, înlocuind $x$ cu $2-x$ obţinem $f(3-x) = f(1-x) + f\big(f(x-1)\big)$.

Dar $f(1-x) = f(x-1)$ implică $f\big(f(x-1)\big) = f\big(f(1-x)\big)$, adică $f(x+1)-f(x-1) = f(3-x) - f(1-x)$, deci $f(x+1) = f(3-x) = f(x-3)$. Punând $x+1$ în loc de $x$ obţinem $f(x+2) = f(x-2)$ ($f$ este periodică de perioadă 4).
Punând $y = 2$ în ecuaţia din enunţ obţinem $f(x+2) = f(x-2) + f\big(f(1-2x)\big)$, deci $f\big(f(1-2x)\big) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Înlocuind $x$ cu $\dfrac{1-t}{2}$ rezultă că $f\big(f(t)\big) = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Ecuaţia iniţială devine atunci $f(x+y) = f(x-y)$. Alegând $x = y = \dfrac{t}{2}$ rezultă $f(t) = f(0)$ adică $f$ este constantă. Cum $f\big(f(t)\big) = 0$, rezultă $f(t) = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
Reciproc, funcţia constantă 0 verifică într-adevăr ecuaţia din enunţ.