BARAJE JBMO FRANŢA 2015
Al patrulea baraj pentru JBMO, Paris, 13 mai 2015

1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $AB < AC < BC$. Fie Γ cercul său circumscris. Fie D şi E punctele diametral opuse în Γ punctelor B şi C. Cercul de centru A şi de rază AE taie segmentul $[AC]$ în punctul K, iar cercul de centru A şi de rază AD taie dreapta BA în punctul L astfel încât A se află între B şi L. Demonstraţi că dreptele EK şi DL se taie într-un punct de pe Γ.

2. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $a + b + c = 1$. Arătaţi că

$$\frac{7+2b}{1+a} + \frac{7+2c}{1+b} + \frac{7+2a}{1+c} \geq \frac{69}{4}.$$

3. Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi care verifică ecuaţia

$$x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2).$$

4. Se consideră n puncte în interiorul unui dreptunghi R astfel încât nicicare două dintre aceste puncte să nu se afle pe o aceeaşi dreaptă paralelă cu laturile lui R. Dreptunghiul R este tăiat în mai multe dreptunghiuri mai mici ale căror laturi sunt paralele cu cele ale lui R, astfel încât niciunul din punctele considerate să nu se afle în interiorul vreunuia din dreptunghiurile mici. Demonstraţi că numărul dreptunghiurilor mici este cel puţin $n + 1$.

Timp de lucru: 4 ore