

BARAJE JBMO FRANȚA 2015
Al treilea baraj pentru JBMO, 25 martie 2015

1. 2014 persoane stau într-un rând. Fiecare din ele fie spune mereu adevărul, fie minte mereu. Fiecare din cele 2014 persoane afirmă: „sunt mai multe persoane care mint la stânga mea decât persoane care spun adevărul la dreapta mea”. Câți mincinoși pot fi printre persoanele din rând?
2. Fie ABC un triunghi. Notăm cu D piciorul bisectoarei unghiului $\angle A$. Fie M și N două puncte ale lui $[AD]$ astfel încât $\angle NBA \equiv \angle CBM$. Fie E al doilea punct de intersecție a dreptei BM cu cercul circumscris triunghiului ACM și fie F al doilea punct de intersecție a dreptei CN cu cercul circumscris triunghiului ABN . Demonstrați că A, E, F sunt coliniare.
3. Determinați toate numerele naturale m și n care verifică ecuația $2^n = 3^m + 23$.
4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy,$$

pentru orice x și y reale.

Timp de lucru: 4 ore