BARAJE JBMO FRANŢA 2015
Al doilea baraj pentru JBMO, 19 februarie 2015

1. Determinaţi numerele reale x, y, z care satisfac sistemul următor de ecuaţii:

$$x = \sqrt{2y+3},\ y = \sqrt{2z+3},\ z = \sqrt{2x+3}.$$

2. Fie n şi k două numere naturale nenule. Dispunem de nk obiecte (de aceeaşi mărime) şi de k cutii. În fiecare cutie încap n obiecte. Fiecare obiect este colorat cu una din k culori disponibile. Demonstraţi că putem aranja obiectele în cutii astfel încât în fiecare cutie să fie obiecte de cel mult două culori.

3. Spunem că un număr natural nenul n este *amuzant* dacă, pentru orice divizor pozitiv d al lui n, numărul $d+2$ este prim. Determinaţi toate numerele naturale amuzante pentru care numărul divizorilor este maxim.

4. Fie ABC un triunghi scalen. Fie ω cercul înscris şi I centrul său. Notăm cu M, N, P punctele de contact ale lui ω cu laturile $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$. Fie $\{J\} = MN \cap IC$. Dreapta PJ taie a doua oară ω în K. Demonstraţi că:
a) $CKIP$ este inscriptibil;
b) $(CI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PCK$.

Timp de lucru: 4 ore

1. Determinaţi numerele reale x, y, z care satisfac sistemul următor de ecuaţii:

$$x = \sqrt{2y+3},\ y = \sqrt{2z+3},\ z = \sqrt{2x+3}.$$

Soluţie:
Este evident că numerele x, y, z trebuie să fie pozitive. Primele două ecuaţii revin la $x^2 = 2y+3$ şi $y^2 = 2z+3$. Scăzându-le, obţinem $x^2 - y^2 = 2(y-z)$. Deducem că, dacă $x \le y$, atunci $y \le z$ şi, analog, dacă $y \le z$, atunci $z \le x$. Aşadar, dacă $x \le y$, atunci $x \le y \le z \le x$, ceea ce implică $x = y = z$.
Analog, rezultă şi în cazul $y \le x$ că $x = y = z$. Deci, în orice situaţie, trebuie ca x, y, z să fie egale şi să verifice ecuaţia $x^2 = 2x+3$, care revine la $(x-3)(x+1) = 0$. Cum $x > 0$, rezultă că $x = y = z = 3$. Reciproc, se verifică uşor că $x = y = z = 3$ este soluţie a sistemului.

2. Fie n şi k două numere naturale nenule. Dispunem de nk obiecte (de aceeaşi mărime) şi de k cutii. În fiecare cutie încap n obiecte. Fiecare obiect este colorat cu una din k culori disponibile. Demonstraţi că putem aranja obiectele în cutii astfel încât în fiecare cutie să fie obiecte de cel mult două culori.
Soluţie:
Vom face demonstraţia prin inducţie după k. Dacă $k = 1$ afirmaţia este evidentă. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru orice $j < k$ şi să o demonstrăm pentru k. Dacă una din culori, c, este folosită de exact n ori, punem toate obiectele de culoarea c în ultima cutie. Ipoteza de inducţie ne arată că putem aranja cele $n(k-1)$ obiecte rămase în primele $k-1$ cutii astfel încât în fiecare cutie să avem obiecte de cel mult două culori.
Să presupunem acum că nicio culoare nu este folosită de exact n ori. Dacă toate culorile sunt folosite de cel mult $n-1$ ori, putem avea cel mult $(n-1)k$ obiecte în total, ceea ce contrazice ipoteza. Deci una dintre culori, c_1, este folosită de cel puţin $n+1$ ori. Similar, una din culori, c_2, este folosită de cel mult $n-1$ ori. Plasăm toate obiectele de culoarea c_2 în ultima cutie şi completăm cutia cu obiecte de culoarea c_1. Ipoteza de inducţie asigură că putem aranja cele $n(k-1)$ obiecte rămase în primele $k-1$ cutii astfel încât fiecare cutie să conţină obiecte de cel mult două culori.

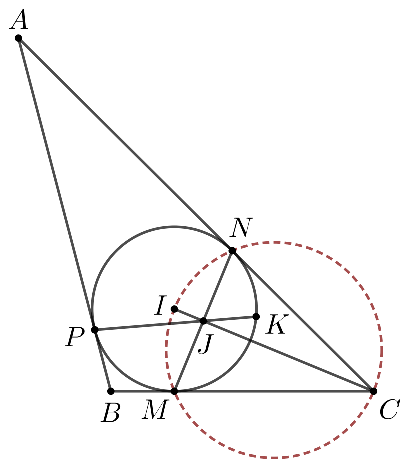
3. Spunem că un număr natural nenul n este *amuzant* dacă, pentru orice divizor pozitiv d al lui n, numărul $d+2$ este prim. Determinaţi toate numerele naturale amuzante pentru care numărul divizorilor este maxim.
Soluţie:
Fie n un număr amuzant şi p un divizor prim al lui n. Atunci p este impar, deoarece $p+2$ este prim.
Să presupunem că $p \ge 5$. Atunci $p+2$ este prim şi $p+2 > 3$, deci $p+2$ nu este divizibil cu 3. Deducem că p nu este congruent cu 1 modulo 3. Este clar că p nu este congruent nici cu 0 modulo 3, deci $p \equiv 2 \pmod 3$.
Să presupunem că $p^2 \mid n$. Atunci $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, deci $p^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$. În plus,

p^2+2 este prim, deci $p^2+2=3$, ceea ce este imposibil. Deducem din cele de mai sus că dacă $p \geq 5$ este un divizor prim al lui n, atunci p^2 nu îl divide pe n.
De asemenea, dacă p_1 şi p_2 sunt divizori primi distincţi ≥ 5 ai lui n, atunci p_1p_2 divide n, deci p_1p_2+2 este divizibil cu 3, ceea ce este imposibil.
Prin urmare, orice număr amuzant n este de forma $n=3^k$ sau de forma 3^kp unde p este prim.
Se verifică uşor că $3+2$, 3^2+2, 3^3+2 şi 3^4+2 sunt prime, dar 3^5+2 nu este, deci trebuie $k \leq 4$.
Numerele de forma 3^k au aşadar cel mult 5 divizori.
Dacă $n=3^4 \cdot 5=405$, atunci $n+2$ nu este prim, deci n nu este amuzant.
Dacă $n=3^kp$ cu $p \geq 7$ prim şi $k \geq 3$, atunci numerele p, $3p$, $9p$, $27p$ sunt divizori ai lui n congruenţi cu p, $3p$, $4p$, $2p$ modulo 5. Cele patru numere dau resturi nenule diferite la împărţirea cu 5, deci, într-o anumită ordine, ele dau resturile 1, 2, 3, 4.
Aşadar există un divizor $d \geq 7$ al lui n astfel încât $d \equiv 3 \pmod 5$. Atunci $d+2>5$ şi $5 \mid d+2$, ceea ce arată că $d+2$ nu este prim.
Deducem din cele de mai sus că întregii amuzanţi de forma 3^kp satisfac $k \leq 2$ sau ($k \leq 3$ şi $p=5$), deci au cel mult 8 divizori, cu egalitate numai dacă $k=3$ şi $p=5$.
Reciproc, verificăm că $3^3 \cdot 5$ este amuzant, deci unicul număr amuzant care are un număr maxim de divizori, 8, este numărul $3^3 \cdot 5=135$.

4. Fie ABC un triunghi scalen. Fie ω cercul înscris şi I centrul său. Notăm cu M, N, P punctele de contact ale lui ω cu laturile $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$. Fie $\{J\}=MN \cap IC$. Dreapta PJ taie a doua oară ω în K. Demonstraţi că:
a) $CKIP$ este inscriptibil;
b) $(CI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PCK$.

Soluţie:

a) Deoarece $IM \perp MC$ şi $IN \perp NC$, punctele M şi N sunt situate pe cercul de diametru $[IC]$, deci punctele M, N, I, C sunt conciclice. Scriind puterea punctului J faţă de acest cerc obţinem $JM \cdot JN = JI \cdot JC$. Pe de altă parte, din puterea lui J faţă de cercul înscris, rezultă $JM \cdot JN = JK \cdot JP$. Aşadar $JI \cdot JC = JK \cdot JP$, ceea ce arată că punctele I, C, K, P sunt conciclice.



b) Din **a)** rezultă $\sphericalangle ICP \equiv \sphericalangle IKP$ şi $\sphericalangle KCI \equiv \sphericalangle KPI$. Dar triunghiul IPK este isoscel cu vârful în I, deci $\sphericalangle IKP \equiv \sphericalangle IPK$, de unde $\sphericalangle ICP \equiv \sphericalangle ICK$.