BARAJE JBMO FRANŢA 2015

Primul baraj pentru JBMO, 7 ianuarie 2015

1. a) Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, k astfel încât $a < b$, avem

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

b) Demonstraţi că $\frac{1}{100} + \frac{4}{101} + \frac{7}{102} + \frac{10}{103} + \ldots + \frac{148}{149} > 25.$

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $D \in BC$ astfel încât $AD = AB$ şi $D \neq B$. Fie Γ cercul circumscris lui ABC, Δ tangenta în C la Γ şi $\{E\} = AD \cap \Delta$. Demonstraţi că $CD^2 = AD \cdot DE - BD \cdot DC$.

3. Fie n un număr natural nenul astfel încât $n(n + 2015)$ este pătrat perfect.
a) Demonstraţi că n nu este număr prim.
b) Daţi exemplu de un astfel de număr n.

4. Vrem să colorăm submulţimile de trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ astel încât dacă două asemenea submulţimi sunt disjuncte, atunci ele au culori diferite. Care este numărul minim de culori cu care se poate realiza acest obiectiv?

Timp de lucru: 4 ore

1. a) Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, k astfel încât $a < b$, avem

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

b) Demonstraţi că $\dfrac{1}{100} + \dfrac{4}{101} + \dfrac{7}{102} + \dfrac{10}{103} + \ldots + \dfrac{148}{149} > 25$.

Soluţie:

a) Inegalitatea revine la $a(b+k) < b(a+k)$, adică la $ak < bk$, ceea ce este evident.

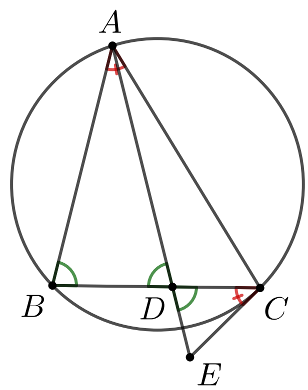
b) Folosind relaţia de la **a)**, avem

$\dfrac{1}{100} + \dfrac{4}{101} + \dfrac{7}{102} + \dfrac{10}{103} + \ldots + \dfrac{148}{149} > \dfrac{1}{100} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{5}{100} + \dfrac{7}{100} + \ldots + \dfrac{99}{100} = \dfrac{1+3+5+\ldots 99}{100} = \dfrac{50^2}{100} = 25.$

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $D \in BC$ astfel încât $AD = AB$ şi $D \neq B$. Fie Γ cercul circumscris lui ABC, Δ tangenta în C la Γ şi $\{E\} = AD \cap \Delta$. Demonstraţi că $CD^2 = AD \cdot DE - BD \cdot DC$.

Soluţie:

Avem $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBA$ şi $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle BAC$, deci triunghiurile ABC şi CDE sunt asemenea. Rezultă că $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BC}{DE}$, deci $AD \cdot DE - BD \cdot DC = AB \cdot DE - BD \cdot DC = BC \cdot CD - BD \cdot CD = (BC - BD)CD = CD^2$.



3. Fie n un număr natural nenul astfel încât $n(n+2015)$ este pătrat perfect.

a) Demonstraţi că n nu este număr prim.

b) Daţi exemplu de un astfel de număr n.

Soluţie:

a) Să presupunem că n este prim şi că există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $n(n+2015) = m^2$. Atunci n divide m^2, deci n divide m. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = kn$. Atunci $n(n+2015) = k^2n^2$ revine la $n + 2015 = k^2n$, sau $n(k^2-1) = 2015$. Aşadar

n este un divizor prim al lui $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, adică $n \in \{5, 13, 31\}$. Atunci $k^2 - 1 \in \{403, 155, 65\}$, sau $k^2 \in \{404, 156, 66\}$, dar niciunul din aceste numere nu este pătrat perfect, contradicţie.
b) Căutăm numere naturale nenule n şi m astfel încât $n(n+2015) = m^2$, adică $4n^2 + 4 \cdot 2015 = (2m)^2$ care revine la $(2n+2015)^2 - (2m)^2 = 2015^2$ sau încă la $(2n+2015-2m)(2n+2015+2m) = 2015^2$. Cum $2n+2015+2m$ trebuie să fie un divizor al lui 2015^2 mai mare ca 2015, putem, de exemplu, lua $2n+2015+2m = 2015 \cdot 5$. Atunci $2n + 2015 - 2m = 403$, de unde $2n + 2015 = 5239$, deci $n = 1612$.

4. Vrem să colorăm submulţimile de trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ astel încât dacă două asemenea submulţimi sunt disjuncte, atunci ele au culori diferite. Care este numărul minim de culori cu care se poate realiza acest obiectiv?
Soluţie:
Să onsiderăm secvenţa de submulţimi $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{1, 2, 3\}$. Fiecare submulţime trebuie să aibă o culoare diferită de cea a submulţiii următoare, deci deja se vede că este nevoie de cel puţin două culori. Dacă am avea numai două culori, atunci culorile ar trebui să alterneze, ceea ce nu se poate pentru că prima submulţime coincide cu ultima, iar cele două submulţimi ar trebui să aibă culori opuse. Aşadar este nevoie de cel puţin trei culori.
Reciproc, arătăm că trei culori sunt suficiente.
Colorăm cu albastru submulţimile care conţin cel puţin două dintre numerele 1, 2, 3.
Colorăm cu verde acele submulţimi care conţin cel puţin două dintre numerele 4, 5, 6.
Colorăm cu roşu celelalte submulţimi.
Este evident că oricare două submulţimi albastre au în comun unul dintre numerele 1, 2, 3, că oricare două submulţimi verzi au în comun unul din numerele 4, 5, 6, iar oricare două submulţimi roşii îl au în comun pe 7.
Remarcă: Problema a fost dată şi în România, la barajul 2 din 2013.