BARAJE JBMO FRANŢA 2014
Al treilea baraj pentru JBMO, 14 mai 2014

1. Determinaţi numărul maxim de elemente pe care le putem alege din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ astfel încât diferenţa dintre oricare două dintre elementele alese să fie diferită de 17.

2. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}$. Tangentele din P la cercul $\mathcal{C}$ intersectează cercul în punctele A şi B. O dreaptă care trece prin P intersectează cercul în punctele Q şi R. Fie $S \in \mathcal{C}$ astfel încât $BS \parallel QR$. Demonstraţi că SA trece prin mijlocul lui $[QR]$.

3. Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Demonstraţi că

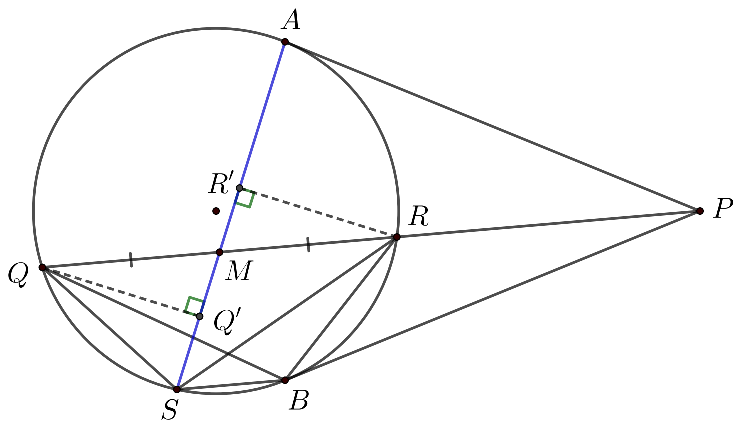
$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \leq 1.$$

4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ care au proprietatea că $m^2 + f(n)$ divide $mf(m) + n$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Timp de lucru: 4 ore

1. Determinaţi numărul maxim de elemente pe care le putem alege din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ astfel încât diferenţa dintre oricare două dintre elementele alese să fie diferită de 17.
Soluţie:
Pentru fiecare $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$ considerăm A_r mulţimea numerelor naturale nenule, mai mici sau egale cu 2014 care dau restul r la împărţirea cu 17. Condiţia din enunţ revine la a alege cât mai multe elemente din fiecare mulţime A_r fără a alege elemente consecutive ale unei aceeaşi submulţimi (numerele cu diferenţa 17 sunt elemente consecutive ale unei submulţimi A_r). Dintr-o submulţime A_r cu un număr par de elemente putem alege cel mult jumătate (altfel avem printre numerele alese două elemente consecutive ale lui A_r). Dintr-o submulţime A_r cu un număr impar, $2k+1$, de elemente putem alege cel mult jumătatea mai mare, adică $k+1$ elemente. Putem alege pentru fiecare A_r elementele de rang impar (cel mai mic element, al treilea cel mai mic, al cincilea, etc). Deoarece $2014 = 17 \cdot 118 + 8$, 8 dintre mulţimile A_r au câte 119 elemente, celelalte 9 au 118 elemente. Aşadar putem alege cel mult $8 \cdot 60 + 9 \cdot 59 = 1011$ numere. (Exemplul dat mai sus, în care alegem elementele de rang impar ale fiecărei submulţimi A_r, revine la următoarea alegere: alegem primele 17 elemente, apoi pe următoarele 17 nu le alegem, apoi din nou le alegem pe următoarele 17, etc.)

2. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}$. Tangentele din P la cercul $\mathcal{C}$ intersectează cercul în punctele A şi B. O dreaptă care trece prin P intersectează cercul în punctele Q şi R. Fie $S \in \mathcal{C}$ astfel încât $BS \parallel QR$. Demonstraţi că SA trece prin mijlocul lui $[QR]$.
Soluţie:
Cum $\sphericalangle RBP \equiv \sphericalangle RQB$, triunghiurile PRB şi PBQ sunt asemenea. La fel şi triunghiurile PRA şi PAQ. Atunci $\dfrac{RB}{BQ} = \dfrac{PB}{PQ} = \dfrac{PA}{PQ} = \dfrac{RA}{AQ}$. $SBRQ$ este trapez isoscel, deci simetric faţă de mediatoarea lui $[SB]$. Atunci $RB = QS$ şi $BQ = RS$, deci $\dfrac{RA}{AQ} = \dfrac{QS}{RS}$, adică $RA \cdot RS = AQ \cdot QS$. Unghiurile $\sphericalangle ARS$ şi $\sphericalangle AQS$ sunt suplementare, deci au acelaşi sinus. Prin urmare, $2\mathcal{A}_{ARS} = AR \cdot RS \cdot \sin(\sphericalangle ARS) = AQ \cdot QS \cdot \sin(\sphericalangle AQS) = 2\mathcal{A}_{AQS}$. Dacă $\{M\} = AS \cap QR$, iar Q' şi R' sunt proiecţiile lui Q, respectiv R, pe AS, din cele de mai sus rezultă că $AS \cdot QQ' = AS \cdot RR'$, adică $QQ' = RR'$. Atunci triunghiurile MQQ' şi MRR' sunt congruente, deci $MQ = MR$.



3. Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Demonstraţi că

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \leq 1.$$

Soluţie:
Pentru a face să apară termenii a_k^2, ridicăm relaţia $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ la pătrat, apoi exploatăm ordinea numerelor:
$1 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_j^2 = a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2$.
Remarcă: Folosind că $1 + 3 + \ldots + (2n-3) = (n-1)^2$, obţinem că $a_n \leq \dfrac{a_1 + 3a_2 + \ldots + (2n-3)a_{n-1}}{(n-1)^2}$ (din inegalitatea ponderată a mediilor). Folosind această ultimă inegalitate, putem demonstra inegalitatea prin inducţie şi mixing variables: notând $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2$, avem
$E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq E_n\left(a_1 + \dfrac{a_n}{n-1}, a_2 + \dfrac{a_n}{n-1}, \ldots, a_{n-1} + \dfrac{a_n}{n-1}, 0\right) = E_{n-1}\left(a_1 + \dfrac{a_n}{n-1}, a_2 + \dfrac{a_n}{n-1}, \ldots, a_{n-1} + \dfrac{a_n}{n-1}\right)$.

4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ care au proprietatea că $m^2 + f(n)$ divide $mf(m) + n$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.
Soluţie:
Fie f o funcţie cu proprietatea din enunţ.
Pentru $m = n = 2$, condiţia din enunţ devine $4 + f(2) \mid 2f(2) + 2$. Dar $4 + f(2)$ divide şi $8 + 2f(2)$, deci divide şi pe 6. Deducem că $f(2) = 2$.
Alegând acum $m = 2$, condiţia din enunţ revine la $4 + f(n)$ divide $4 + n$, ceea ce

implică $f(n) \leq n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Pe de altă parte, punând $m = n$ în condiţia din enunţ, obţinem că $n^2 + f(n)$ divide $nf(n) + n$, deci $n^2 + f(n) \leq nf(n) + n$, adică $n(n-1) \leq (n-1)f(n)$, de unde $f(n) \geq n$, $\forall\, n \geq 2$. Avem, evident, şi $f(1) \geq 1$, deci, $f(n) \geq n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, adică $f(n) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, funcţie care verifică într-adevăr condiţia din enunţ.