BARAJE JBMO FRANŢA 2014
Al doilea baraj pentru JBMO, 26 februarie 2014

1. Determinaţi toate tripletele de numere întregi (x, y, z) care verifică

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

2. Pe o dreaptă se găsesc 400 puncte albastre şi 200 de puncte verzi. Demonstraţi că putem găsi un segment care conţine 200 de puncte albastre şi 100 de puncte verzi.

3. Fie a, b, c, d numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+d+2} + \frac{1}{d+a+2} \leq 1.$$

4. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două cercuri exterioare, de centre O şi O'. Construim două raze paralele, de acelaşi sens, (OM) şi $(O'M')$ şi încă două raze paralele şi de acelaşi sens, (OP) şi $(O'P')$ (punctele M şi M' sunt în acelaşi semiplan determinat de OO'; la fel şi punctele P, P' sunt de aceeaşi parte a lui OO'). Dreapta MM' intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}'$ în N, iar dreapta PP' intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}'$ în Q. Demonstraţi că punctele M, N, P, Q sunt conciclice.

Timp de lucru: 4 ore

1. Determinaţi toate tripletele de numere întregi (x, y, z) care verifică

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

Soluţie:
Rescriem ecuaţia sub forma $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2 = 192$. Un pătrat perfect poate fi congruent cu 0 sau 1 modulo 4, deci o sumă de trei pătrate perfecte este congruentă cu 0 modulo 4 dacă şi numai dacă fiecare pătrat este congruent cu 0 modulo 4. Notând $x-8 = 2a$, $y-8 = 2b$, $z-8 = 2c$ obţinem că $a^2+b^2+c^2 = 48$. Din nou, a, b, c trebuie să fie pare: $a = 2d$, $b = 2e$, $c = 2f$. Atunci $d^2+e^2+f^2 = 12$, deci iarăşi d, e, f sunt pare. Dacă $d = 2g$, $e = 2h$, $f = 2i$, atunci $g^2 + h^2 + i^2 = 3$, deci $g = \pm 1$, $h = \pm 1$, $i = \pm 1$. Deducem că $a, b, c \in \{-8, 8\}$, adică $x, y, z \in \{0, 16\}$. Ecuaţia are 8 soluţii.

2. Pe o dreaptă se găsesc 400 puncte albastre şi 200 de puncte verzi. Demonstraţi că putem găsi un segment care conţine 200 de puncte albastre şi 100 de puncte verzi.
Soluţie:
Să notăm punctele dreptei, în ordine, cu $P_1, P_2, \ldots, P_{600}$. Trebuie să demonstrăm că există $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 300\}$ astfel încât printre punctele $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_{k+300}$ să fie 200 de puncte albastre şi 100 verzi. Să definim funcţia $f : \{0, 1, 2, \ldots, 300\} \to \mathbb{N}$, $f(k) =$ numărul de puncte verzi din mulţimea $\{P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_{k+300}\}$. Vrem să arătăm că funcţia ia valoarea 100. Pentru aceasta să remarcăm două lucruri:
• $f(0) + f(300) = 200$ (numărul punctelor verzi aflate printre primele 300 de puncte, plus numărul punctelor verzi aflate printre ultimele 300 de puncte dă totalul punctelor verzi, 200.) Avem fie $f(0) = f(300) = 100$, ceea ce ar rezolva problema, fie exact unul dintre numere este mai mare ca 100, iar celălalt mai mic ca 100.
• $f(k+1) - f(k)$ poate lua numai următoarele trei valori: 0 dacă punctele P_k şi P_{k+301} au aceeaşi culoare, 1 dacă P_k este albastru, iar P_{k+301} este verde sau -1 dacă P_k este verde, iar P_{k+301} este albastru.
Aşadar, pornind cu $k = 0$ şi mărindu-l succesiv pe k cu 1 până ajungem la $k = 300$, $f(k)$ nu sare valori, deci în drumul său de la $f(0)$ la $f(300)$, f ia toate valorile intermediare, deci în particular şi pe 100.

3. Fie a, b, c, d numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+d+2} + \frac{1}{d+a+2} \le 1.$$

Soluţie:
Din inegalitatea mediilor, avem $\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{c+d+2} \le \frac{1}{2\sqrt{ab}+2} + \frac{1}{2\sqrt{cd}+2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}+2} + \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{ab}}+2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}+2} + \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}+2} = \frac{1}{2}$. Analog se arată că şi suma

celorlalţi doi termeni este cel mult $\dfrac{1}{2}$, de unde, prin adunare, rezultă concluzia. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = d = 1$.

4. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două cercuri exterioare, de centre O şi O'. Construim două raze paralele, de acelaşi sens, (OM) şi $(O'M')$ şi încă două raze paralele şi de acelaşi sens, (OP) şi $(O'P')$ (punctele M şi M' sunt în acelaşi semiplan determinat de OO'; la fel şi punctele P, P' sunt de aceeaşi parte a lui OO'). Dreapta MM' intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}'$ în N, iar dreapta PP' intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}'$ în Q. Demonstraţi că punctele M, N, P, Q sunt conciclice.

Soluţie:

Fie $\{X\} = MM' \cap OO'$ şi $\{Y\} = PP' \cap OO'$. Triunghiurle XOM şi $XO'M'$ sunt asemenea, la fel şi XOP cu $XO'P'$. Avem $\dfrac{XO}{XO'} = \dfrac{OM}{O'M'} = \dfrac{OP}{O'P'} = \dfrac{YO}{YO'}$.

Cum $X, Y \in OO' \setminus (OO')$ sunt astfel încât $\dfrac{XO}{XO'} = \dfrac{YO}{YO'}$, rezultă că $X = Y$ adică dreptele MM', PP' şi OO' sunt concurente (în centrul de omotetie exterioară al celor două cercuri). Rezultă că $MP \parallel M'P'$, deci $\sphericalangle XMP \equiv \sphericalangle XM'P' \equiv \sphericalangle XQN$ (din patrulaterul inscriptibil $M'P'QN$), ceea ce arată că patrulaterul $MPQN$ este inscriptibil.