BARAJE JBMO FRANŢA 2014
Primul baraj pentru JBMO, 15 ianuarie 2014

1. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două cercuri exterioare, de centre O, respectiv O'. O tangentă comună exterioară intersectează tangentele comune interioare în punctele M şi N. Demonstraţi că $OM \perp O'M$ şi $ON \perp O'N$.

2. Fie k un număr natural nenul. Un operator de telefonie propune fiecărui client să-şi aleagă k numere cu care comunicarea să fie gratuită. (Dacă un client A alege numărul lui B, atunci atât apelurile lui A către B cât şi cele ale lui B către A sunt gratuite.) Considerăm un grup de n persoane.
a) Dacă $n \geq 2k+2$, demonstraţi că în grup există două persoane care nu pot comunica gratuit.
b) Dacă $n = 2k+1$, demonstraţi că cele n persoane din grup pot face în aşa fel încât oricare două persoane din grup să poată comunica gratuit.

3. Fie n un număr natural nenul. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există numerele naturale nenule $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{n}{x_n} = p.$$

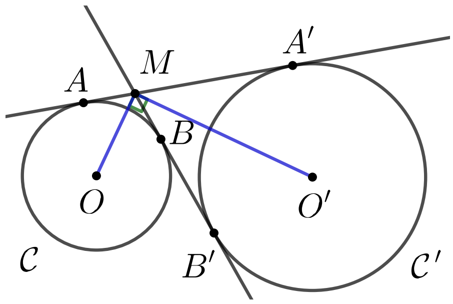
4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $AB \neq AC$. Notăm cu D piciorul bisectoarei lui $\sphericalangle BAC$. Punctele E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Cercul circumscris triunghiului DBF intersectează cercul circumscris triunghiului DCE într-un punct M diferit de D. Demonstraţi că $ME = MF$.

Timp de lucru: 4 ore

1. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două cercuri exterioare, de centre O, respectiv O'. O tangentă comună exterioară intersectează tangentele comune interioare în punctele M şi N. Demonstraţi că $OM \perp O'M$ şi $ON \perp O'N$.

Soluţie:

Fie A şi A' punctele de contact ale tangentei exterioare cu cercurile $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$, iar B şi B' punctele de contact ale tangentei interioare care trece prin M cu cercurile $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$. Cele două tangente care trec prin M sunt simetrice faţă de OM deci $(MO$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle AMB$. La fel, $(MO'$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle A'MB'$, deci bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle AMB$. Bisectoarea exterioară fiind perpendiculară pe cea interioară obţinem imediat concluzia.



2. Fie k un număr natural nenul. Un operator de telefonie propune fiecărui client să-şi aleagă k numere cu care comunicarea să fie gratuită. (Dacă un client A alege numărul lui B, atunci atât apelurile lui A către B cât şi cele ale lui B către A sunt gratuite.) Considerăm un grup de n persoane.

a) Dacă $n \geq 2k+2$, demonstraţi că în grup există două persoane care nu pot comunica gratuit.

b) Dacă $n = 2k+1$, demonstraţi că cele n persoane din grup pot face în aşa fel încât oricare două persoane din grup să poată comunica gratuit.

Soluţie:

Vom spune că o persoană A a ales o persoană B dacă numărul lui B face parte dintre numerele alese de A cu care comunicarea să fie gratuită.

a) Deoarece fiecare persoană poate alege cel mult k alte persoane, există cel mult kn perechi de persoane care pot comunica gratuit. Ori numărul total de perechi de persoane este $\dfrac{n(n-1)}{2}$, (fiecare din cele n persoane este în pereche cu celelalte $n-1$, deci sunt $n(n-1)$ perechi, însă fiecare pereche a fost numărată de două ori) şi $\dfrac{n(n-1)}{2} \geq \dfrac{n(2k+1)}{2} > nk$. Astfel, numărul total de perechi este mai mare decât numărul de perechi care pot comunica gratuit, deci există măcar o pereche de persoane care nu pot comunica gratuit.

b) Să plasăm cele $2k+1$ persoane pe un cerc. Fiecare persoană alege să comunice gratuit cu cele k persoane situate după ea pe cerc. Astfel fiecare persoană X va putea comunica gratuit cu toată lumea, celelalte k persoane, cele pe care nu le-a ales X, alegând-o ei pe X.

3. Fie n un număr natural nenul. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există numerele naturale nenule $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{n}{x_n} = p.$$

Soluţie:

Vom arăta că mulţimea soluţiilor problemei este $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Să observăm mai întâi că dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sunt numere naturale nenule, atunci $x_k \geq k$, $\forall\, k = \overline{1, n}$. Dacă pentru un număr natural p există numerele naturale $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{n}{x_n} = p$, atunci $1 \leq p \leq n$.

Într-adevăr, folosind că $x_k \geq k$, avem $p = \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{n}{x_n} \leq \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \ldots + \frac{n}{n} = n$.

Reciproc, să arătăm că pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ putem alege $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ numere naturale astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{n}{x_n} = p$. Vom alege să facem primele $p-1$ fracţii egale cu 1 şi ultimele $n-p+1$ egale şi cu suma 1, deci egale cu $\frac{1}{n-p+1}$. Evident, suma acestor fracţii va fi p. Alegem aşadar $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$, $x_{p-1} = p-1$, $x_p = p(n-p+1)$, $x_{p+1} = (p+1)(n-p+1)$, $\ldots$, $x_n = n(n-p+1)$. Este uşor de văzut că $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $AB \neq AC$. Notăm cu D piciorul bisectoarei lui $\sphericalangle BAC$. Punctele E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Cercul circumscris triunghiului DBF intersectează cercul circumscris triunghiului DCE într-un punct M diferit de D. Demonstraţi că $ME = MF$.

Soluţie:

Vom folosi

Teorema lui Miquel: Dacă D, E, F sunt puncte pe laturile (BC), (CA), respectiv (AB) ale unui triunghi ABC, atunci cerurile circumscrise triunghiurilor AEF, BFD şi CDE au un punct comun.

Întradevăr, dacă M este al doilea punct de intersecţie al cercurilor BFD şi CDE, atunci $m(\sphericalangle FMD) = 180° - m(\sphericalangle B)$, $m(\sphericalangle DME) = 180° - m(\sphericalangle C)$, deci

$$m(\sphericalangle EMF) = 360° - m(\sphericalangle FMD) - m(\sphericalangle DME) = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180° - m(\sphericalangle A),$$

ceea ce arată că $AEMF$ este inscriptibil.

În situaţia din problema noastră rezultă că M aparţine cercului circumscris triunghiului AEF.

Să mai observăm că patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle AME) = m(\sphericalangle AFE) = m(\sphericalangle C) = 180^\circ - m(\sphericalangle DME)$, deci $M \in (AD)$. Fiind pe bisectoarea lui $\sphericalangle EAF$, M este mijlocul arcului EF din cercul circumscris lui AEF. Rezultă de aici că $ME = MF$.