BARAJE JBMO FRANŢA 2013
Primul baraj pentru JBMO, 9 ianuarie 2013

1. Dacă n este un număr natural nenul, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale din scrierea în baza 10.
a) Există numere naturale nenule a şi b astfel încât $S(a) = S(b) = S(a+b) = 2013$?
b) Există numere naturale nenule a şi b astfel încât $S(a) = S(b) = S(a+b) = 2016$?

2. Numerele reale a, b, c sunt distincte şi nenule şi presupunem că există două numere reale x şi y astfel încât $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ şi $c^3 + cx + y = 0$. Demonstraţi că $a + b + c = 0$.

3. Pe un cerc Γ se consideră punctele A, B, C astfel încât $AC = BC$. Fie P un punct de pe arcul AB al cercului Γ care nu conţine punctul C. Perpendiculara din C pe PB intersectează PB în D.
Demonstraţi că $PA + PB = 2PD$.

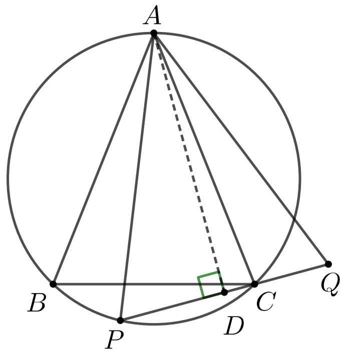
4. În vârfurile unui caroiaj 2013×2013 se plasează scaune. Fiecare scaun este ocupat de către o persoană. Unele persoane decid să-şi schimbe locul: unele persoane se mută cu un loc spre dreapta, altele cu 2 locuri în faţă, unele cu 3 locuri spre stânga şi altele cu 6 locuri în spate. La sfârşit, fiecare loc este ocupat de o singură persoană.
Demonstraţi că există cel puţin o persoană care nu şi-a schimbat locul.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

1. Dacă n este un număr natural nenul, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale din scrierea în baza 10.
a) Există numere naturale nenule a şi b astfel încât $S(a) = S(b) = S(a+b) = 2013$?
b) Există numere naturale nenule a şi b astfel încât $S(a) = S(b) = S(a+b) = 2016$?
Soluţie:
a) Reamintim că un număr natural nenul m şi suma cifrelor sale, $S(m)$, sunt congruente modulo 9.
Într-adevăr, cum $10 \equiv 1 \pmod 9$, avem $10^j \equiv 1^j \equiv 1 \pmod 9$, $\forall\, j \geq 0$, deci, dacă $m = \overline{a_t \ldots a_1 a_0}$, atunci $m = \sum_{j=0}^{t} a_j \cdot 10^j \equiv \sum_{j=0}^{t} a_j = S(m) \pmod 9$.
Presupunând că ar exista a şi b cu proprietatea din enunţ, am avea $a \equiv S(a) \equiv 2013 \equiv 6 \pmod 9$ şi analog $b \equiv 6 \pmod 9$, dar şi $a + b \equiv 6 \pmod 9$. Dar atunci $6 \equiv a + b \equiv 6 + 6 \pmod 9$, contradicţie.
b) Există numere cu această proprietate. Un exemplu ar fi $a = b = \underbrace{9090\ldots909}_{447 \text{ cifre}}$.
Atunci $a + b = \underbrace{1818\ldots18}_{448 \text{ cifre}}$ şi $S(a) = S(b) = S(a + b) = 9 \cdot 224 = 2016$.

2. Numerele reale a, b, c sunt distincte şi nenule şi presupunem că există două numere reale x şi y astfel încât $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ şi $c^3 + cx + y = 0$. Demonstraţi că $a + b + c = 0$.
Soluţie:
Scăzând a doua ecuaţie din prima obţinem $(a - b)(a^2 - ab + b^2 + x) = 0$. Cum $a \neq b$, rezultă $a^2 + ab + b^2 + x = 0$. Analog rezultă că şi $a^2 + ac + c^2 + x = 0$. Scăzând aceste două relaţii obţinem $(b - c)(a + b + c) = 0$ şi, cum $b \neq c$, rezultă $a + b + c = 0$.
Remarcă: Afirmaţia rezultă direct din *relaţiile lui Viète*: dacă a, b, c sunt soluţiile ecuaţiei $t^3 + xt + y = 0$, atunci suma lor este 0.

3. Pe un cerc Γ se consideră punctele A, B, C astfel încât $AC = BC$. Fie P un punct de pe arcul AB al cercului Γ care nu conţine punctul C. Perpendiculara din C pe PB intersectează PB în D.
Demonstraţi că $PA + PB = 2PD$.
Soluţie:
Fie $Q \in (PB$ astfel încât $BQ = PA$. Avem aşadar $AP = BQ$, $CA = CB$ şi $m(\sphericalangle CAP) = 180^\circ - m(\sphericalangle CBP) = m(\sphericalangle CBQ)$, deci $\Delta\, CAP \equiv \Delta\, CBQ$ (LUL). Deducem că $CP = CQ$, adică triunghiul CPQ este isoscel, deci D, piciorul înălţimii din C, este mijlocul lui $[PQ]$. Avem aşadar $PA + PB = BQ + PB = PQ = 2PD$.



4. În vârfurile unui caroiaj 2013×2013 se plasează scaune. Fiecare scaun este ocupat de către o persoană. Unele persoane decid să-şi schimbe locul: unele persoane se mută cu un loc spre dreapta, altele cu 2 locuri în faţă, unele cu 3 locuri spre stânga şi altele cu 6 locuri în spate. La sfârşit, fiecare loc este ocupat de o singură persoană.
Demonstraţi că există cel puţin o persoană care nu şi-a schimbat locul.
Soluţie:
Fie A numărul persoanelor care se mută către dreapta, b numărul persoanelor care se mută în faţă, c numărul persoanelor care se mută spre stânga şi d numărul persoanelor care se mută în spate. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că am considerat un reper în care toate vârfurile carioajului au coordonate întregi (x_i, y_i). Deoarece după mutări poziţiile ocupate rămân, în ansamblul lor, aceleaşi, suma absciselor înainte şi după mutări este aceeaşi, şi la fel suma ordonatelor. Pe de altă parte, suma absciselor se modifică cu $a - 3c$, iar cea a ordonatelor cu $2b - 6d$. Aşadar, avem $a = 3c$ şi $b = 3d$, adică a, c au aceeaşi paritate şi, la fel, b, d au aceeaşi paritate. Dar atunci totalul persoanelor care se deplasează este $a + b + c + d = (a + c) + (b + d)$, care este un număr par, deci nu poate fi 2013. Prin urmare, există cel puţin o persoană care nu se mută.