BARAJE JBMO FRANŢA 2013
Test de antrenament, 24-25 noiembrie 2012

1. Fie x un număr real pozitiv care satisface $x + \dfrac{1}{x} = 3$. Determinaţi valoarea lui

$$x^7 + \frac{1}{x^7}\,.$$

2. Câte numere întregi se pot scrie sub forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm 2012$ cu diverse alegeri ale semnelor $+$ şi $-$?

3. Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care există n numere naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 100]$ care verifică următoarele două condiţii:
a) niciunul dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu este prim;
b) numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt două câte două prime între ele.

4. Fie ABC un triunghi de arie 1. Determinaţi aria maximă a unui paralelogram ale cărui patru vârfuri sunt în interiorul sau pe frontiera triunghiului.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

1. Fie x un număr real pozitiv care satisface $x + \dfrac{1}{x} = 3$. Determinaţi valoarea lui

$$x^7 + \frac{1}{x^7}\,.$$

Soluţie:

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $a_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$. Se verifică uşor că $a_1 a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ şi, cum $a_1 = 3$, rezultă $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$. Se calculează uşor $a_2 = a_1^2 - 2 = 7$, apoi, folosind relaţia de recurenţă stabilită mai sus, se găsesc succesiv termenii următori ai şirului (a_n):
$a_3 = 3a_2 - a_1 = 18$, $a_4 = 3a_3 - a_2 = 47$, $a_5 = 3a_4 - a_3 = 123$, $a_6 = 3a_5 - a_4 = 322$ şi, valoarea căutată, $a_7 = 3a_6 - a_5 = 843$.

2. Câte numere întregi se pot scrie sub forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm 2012$ cu diverse alegeri ale semnelor $+$ şi $-$?
Soluţie:
Fie $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2012 = 1006 \cdot 2013$. S este număr par. Schimbând semnele unora dintre termeni nu schimbăm paritatea rezultatului, deci toate numerele de forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm 2012$ sunt numere pare cuprinse între $-S$ şi S (inclusiv).
Reciproc, arătăm că orice număr par a cuprins între $-S$ şi S poate fi scris sub forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm 2012$.
Evident, $-S$ şi S se scriu sub această formă. Dacă $-S < a < S$, există $0 < b < S$ astfel încât $a = -S + 2b$.
Dacă $b \leq 2012$, atunci putem scrie $a = -1 - 2 - \ldots - (b-1) + b - (b+1) - \ldots - 2012$.
Dacă $b > 2012$ este de forma $\displaystyle\sum_{j=k}^{2012} j$ cu $k \in \{1, 2, \ldots, 2012\}$, atunci putem scrie $a = -1 - 2 - \ldots - (k-1) + k + (k+1) + \ldots + 2012$.
În caz contrar, există $k \in \{1, 2, \ldots, 2011\}$ astfel încât $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{2012} j < b < \sum_{j=k}^{2012} j$. Atunci $b = \ell + \displaystyle\sum_{j=k+1}^{2012} j$, cu $1 \leq \ell \leq k-1$, deci putem scrie $a = -1 - 2 - \ldots - (\ell - 1) + \ell - (\ell + 1) - \ldots - k + (k+1) + (k+2) + \ldots + 2012$.
De la $-S$ la S sunt $2S + 1$ numere, dintre care $S + 1$ pare, deci răspunsul căutat este $1006 \cdot 2013 + 1$.
De fapt cheia soluţiei este să scriem orice a sub forma de mai sus: ultimii câţiva termeni cu plus, iar primii cu minus, cu o posibilă excepţie.

Altă abordare: (bazată pe aceeaşi scriere)
Pornim de la o scriere cu toate semnele ,,minus", $(-, -, -, \ldots, -)$.
Apoi introducem un ,,plus", $(+, -, -, \ldots, -)$, şi îl mutăm tot mai la dreapta: $(-, +, -, \ldots, -)$, $(-, -, +, -, \ldots, -)$, $\ldots$, $(-, -, -, \ldots, -, +)$.

Când nu mai putem muta, introducem un nou plus, $(+,-,-,\ldots,-,+)$, şi îl mutăm tot mai la dreapta:

$$(-,+,-,\ldots,-,+),\ (-,-,+,-,\ldots,-,+),\ \ldots\ ,\ (-,-,-,\ldots,-,+,+).$$

Tot introducem ,,plusuri" la început şi le mutăm spre dreapta până ajung să înlocuiască ultimul ,,minus".

La sfârşit ajungem la $(+,+,+,\ldots,+)$.

Am pornit de la suma $-1-2-\ldots-2012$, iar la fiecare pas suma a crescut cu 2 până a ajuns $1+2+\ldots+2012$. Aşadar se scriu sub această formă, $\pm1\pm2\pm\ldots\pm2012$ (dar mai precis sub forma cu ultimele câteva semne sunt ,,plus", primele sunt ,,minus" cu cel mult o excepţie) toate numerele pare de la $-S$ la S inclusiv, şi numai acelea.

3. Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care există n numere naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 100]$ care verifică următoarele două condiţii:
a) niciunul dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu este prim;
b) numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt două câte două prime între ele.

Soluţie:

În afară de numărul 1 (pe care avem voie să-l considerăm ca fiind unul dintre numere), celelalte trebuie să aibă cel puţin doi factori primi, nu neapărat diferiţi între ei, dar diferiţi de factorii primi ai altor numere. Dintre factorii primi ai unui număr $a_i \neq 1$, cel puţin unul trebuie să fie mai mic sau egal cu $\sqrt{100} = 10$ (altfel $a_i > 100$). Fiind doar patru numere prime mai mici ca 100, putem alege cel mult 5 numere.

Putem într-adevăr alege 5 numere, de exemplu $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 25$, $a_5 = 49$.

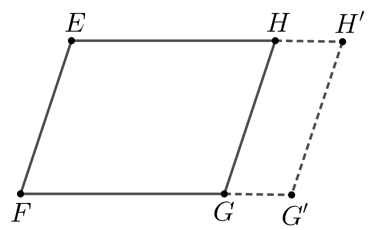
În concluzie, cel mai mare număr natural n cu proprietatea din enunţ este 5.

4. Fie ABC un triunghi de arie 1. Determinaţi aria maximă a unui paralelogram ale cărui patru vârfuri sunt în interiorul sau pe frontiera triunghiului.

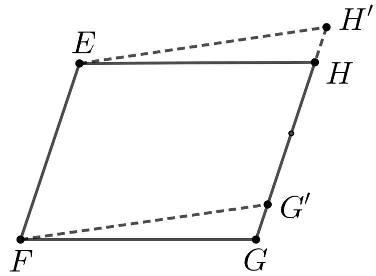
Soluţie:

Pentru orice paralelogram $EFGH$, considerăm operaţiile următoare:

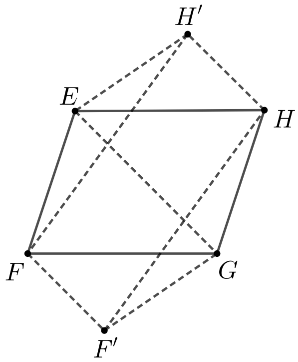
(OP1) Înlocuim G şi H cu G' şi H' astfel încât $GHH'G'$ să fie un paralelogram adiacent lui $EFGH$.



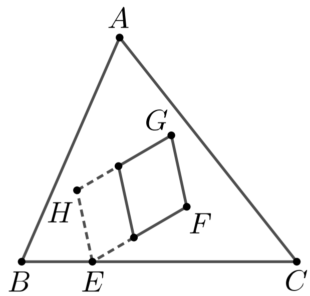
(OP2) Înlocuim G şi H cu G' şi H' astfel încât punctele G, H, G', H' sunt coliniare şi segmentele $[GH']$ şi $[G'H]$ au acelaşi mijloc. (Translatăm punctele G şi H cu un vector de direcţie GH.)



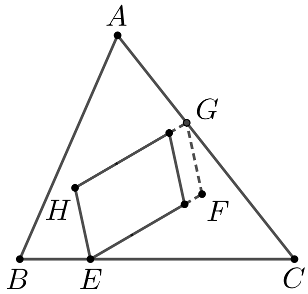
(OP3) Înlocuim F şi H cu F' şi H' astfel încât $EFF'G$ şi $GHH'E$ să fie trapeze congruente.



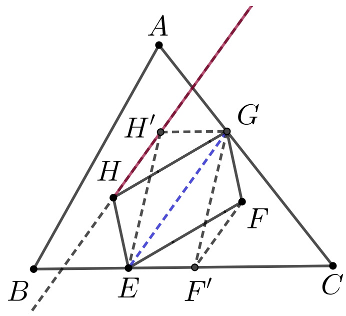
Este uşor de văzut că (OP1) măreşte aria paralelogramului, în timp ce (OP2) şi (OP3) nu o modifică.
Să pornim de la un paralelogram cu vârfurile situate în interiorul triunghiului ABC. Îi vom aplica o serie de operaţii de forma celor de mai sus, păstrând punctele în interiorul sau pe frontiera triunghiului ABC şi mărind sau păstrând aria.
Efectuăm o operaţie (OP1) până ce un vârf, să zicem E, ajunge pe una din laturile triunghiului.



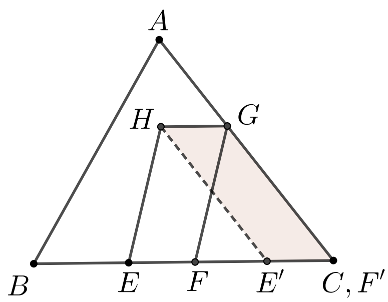
Apoi, efectuând din nou o operaţie (OP1) facem ca încă un vârf să ajungă pe una din laturile triunghiului. Dacă acest vârf nu este cel opus lui E, mai efectuăm o operaţie (OP1) până ce două vârfuri opuse ale paralelogramului ajung pe laturile triunghiului.



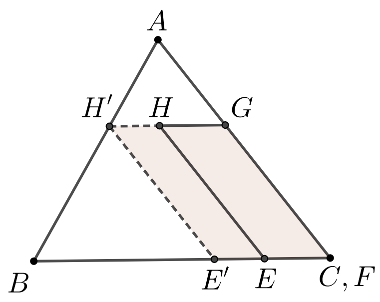
Să presupunem de exemplu că $E \in [BC]$ şi $G \in [CA]$. Punctele A şi B sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta EG. Să notăm cu H vârful paralelogramului care este în acelaşi semiplan cu ele.
Cel puţin una din semidreptele cu originea în H şi paralele cu EG nu intersectează dreapta AB. Efectuăm o operaţie de tip (OP3): îl deplasăm pe H de-a lungul semidreptei identificate mai sus (şi pe F astfel încât $EFGH$ să rămână paralelogram) până ce unul dintre vârfurile F şi H ajunge pe frontiera triunghiului, mai precis pe $[BC] \cup [CA]$. Să zicem că $F' \in [BC]$, ca în figura de mai jos:



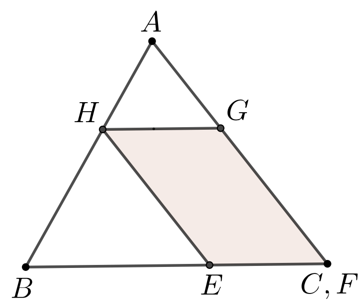
Aplicând acum o operaţie (OP2) putem face ca F să devină C, $E \in [BC]$, $G \in [CA]$.



Cu o ultimă operaţie, de tip (OP1), îl ducem pe H pe $[AB]$:



Aşadar, pentru orice paralelogram cu vârfurile în interiorul sau pe frontiera triunghiului există un paralelogram de arie mai mare (sau egală) care are toate vârfurile pe laturile triunghiului. Am ajuns astfel la o configuraţie de forma



Notând $\dfrac{AH}{AB} = x$, avem $\dfrac{BH}{AB} = 1 - x$, $\mathscr{A}_{\Delta\, AHG} = x^2$, $\mathscr{A}_{\Delta\, BHE} = (1-x)^2$, deci $\mathscr{A}_{EFGH} = 1 - x^2 - (1-x)^2 = 2x(1-x) \leq 2 \cdot \left(\dfrac{x + (1-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. (S-a folosit inegalitatea mediilor.)

Aşadar aria unui paralelogram $EFGH$ este cel mult jumătate din aria triunghiului, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = \dfrac{1}{2}$, adică dacă paralelogramul are trei dintre vârfuri în mijloacele laturilor triunghiulu, iar cel de-al patrulea într-unul din vârfuri.