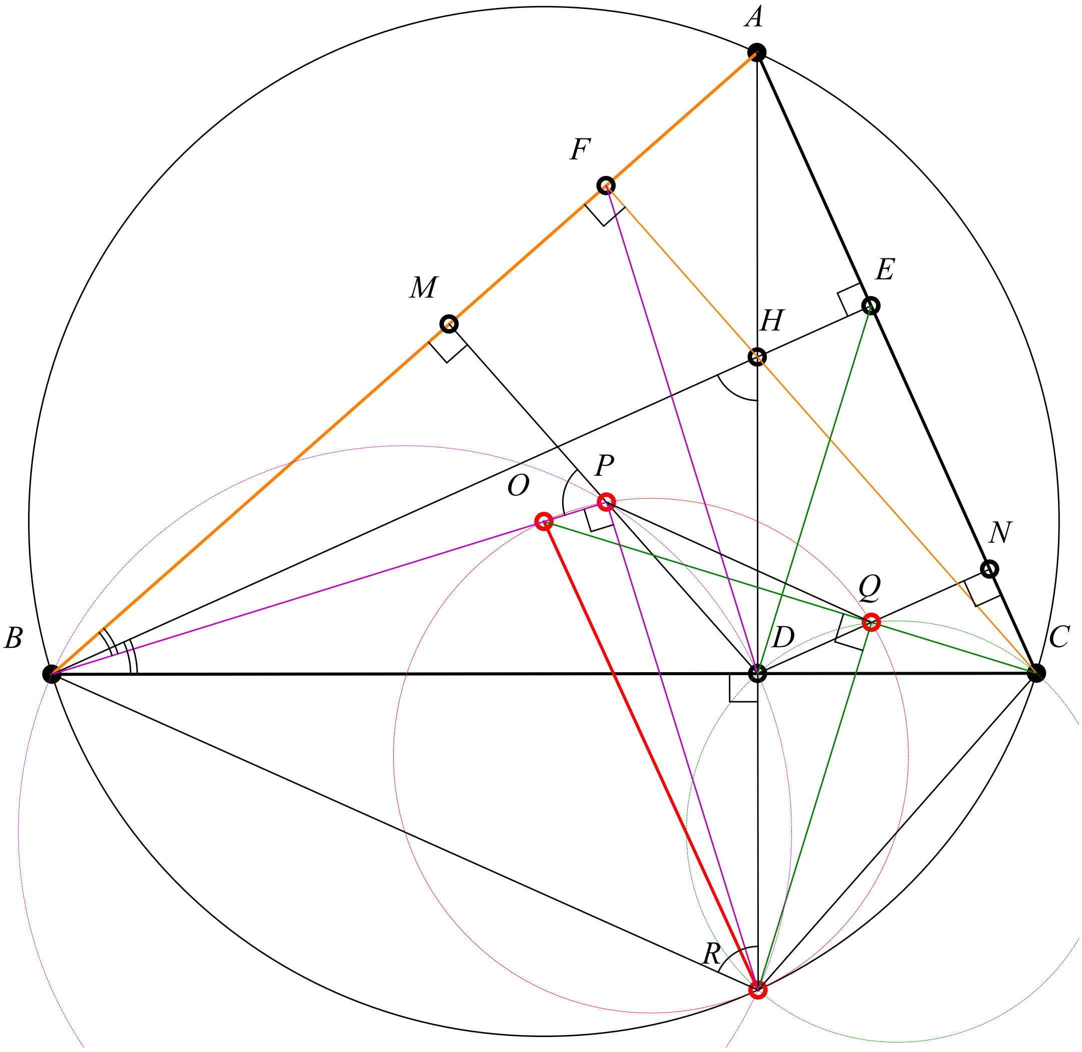
Problema 289 (Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, nr.57):

Fie $O-$centrul cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC şi $D-$piciorul înălţimii duse din vârful A. Notăm cu M şi cu $N-$proiecţiile punctului D pe laturile $[AB]$ şi respectiv $[AC]$; iar cu: $\{P\}=OB\cap[DM]$ şi $\{Q\}=OC\cap[DN]$. Arătaţi că cercul circumscris triunghiului OPQ este tangent la cercul circumscris triunghiului ABC.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu: $R:=S_{BC}\left(H\right)\in\odot ABC,$ avem: şi în

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} O\text{ şi } H-\text{puncte izogonale în }\Delta ABC\Rightarrow\widehat{PBM}\equiv\widehat{HBD}\\ \left.\begin{array}{r}PM\perp MB\\ HD\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{PMB}\equiv\widehat{BDH}\left(=90^0\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{BPM}\equiv\widehat{BHD}\\ R:=S_{BC}\left(H\right)\Rightarrow\Delta BRD\equiv\Delta BHD\Rightarrow\widehat{BRD}\equiv\widehat{BHD}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{BPM}\equiv\widehat{BRD}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow DPOR-inscriptibil\Rightarrow m\left(\widehat{BPR}\right)=m\left(\widehat{BDR}\right)=90^0\Rightarrow P\in\odot[OR]\,(^1)\quad(1)$$

În mod analog se aratăcă: $Q\in\odot[OR].$ (2)

Aşa că dercul circumscris triunghiului OPQ este cercul de diametru $[OR],$ care este tangent în punctul R la cercul circumscris triunghiului $ABC.$ ■

[1] Am notat aici prin $\odot[OR]-$ cercul de diametru $[OR].$