Problema săptămânii 46.
Există numere întregi a şi b astfel încât a^5b+3 şi ab^5+3 să fie simultan cuburi perfecte?

USAJMO, 2014

Problem of the week no. 46
Are there integers a and b such that a^5b+3 and ab^5+3 are both perfect cubes of integers?

USAJMO, 2013

English Solution
Soluţie: (user ABCDE de pe AoPS)
Răspunsul este NU. Să presupunem prin absurd că răspunsul ar fi DA.
Fie $m^3 = a^5b+3$ şi $n^3 = ab^5+3$.
3 nu divide nici a nici b pentru că în caz contrar expresiile ar fi divizibile cu 3 dar nu şi cu 27, deci n-ar putea fi cuburi perfecte.
Avem $m^3-n^3 = ab(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, care este divizibil cu 3 pentru că fie $a+b$ fie $a-b$ este divizibil cu 3 dacă nici a nici b nu sunt.
Din Mica Teoremă a lui Fermat, $m^3-n^3 \equiv m-n \pmod 3$, deci $m \equiv n \pmod 3$
Astfel, $m^3-n^3 = (m-n)(m^2+mn+n^2) \equiv 3m^2(m-n) \pmod 3$. Atunci, $9 \mid m^3-n^3$, deci fie $9 \mid a+b$, fie $9 \mid a-b$. Cazul în care 3 le divide pe amândouă nu este posibil pentru că ar implica $3 \mid b$. Aşadar, $a \equiv b \pmod 9$ sau $a \equiv -b \pmod 9$.
Prin urmare, $a^5b+3 \equiv (a^2)^3+3 \equiv m^3 \pmod 9$ sau $a^5b+3 \equiv -(a^2)^3+3 \equiv m^3 \pmod 9$.
Un cub perfect poate da numai unul dintre resturile $-1,\ 0,\ 1$ modulo 9 şi nicicare două asemenea resturi nu diferă prin 3 şi nu au suma 3, prin urmare am obţinut o contradicţie.

Altă finalizare:
După ce am arătat că a şi b nu sunt multipli de 3, cum resturile cubice modulo 9 sunt 0, 1 şi 8, deducem că a^5b şi ab^5 trebuie să fie congruente cu 5 sau 7 modulo 9. Dar $\varphi(9)=6$, deci, din teorema lui Euler, $a^6 \equiv 1 \pmod 9$ şi $b^6 \equiv 1 \pmod 9$. Deducem că $b \equiv 5a \pmod 9$ sau $b \equiv 7a \pmod 9$ şi $a \equiv 5b \pmod 9$ sau $a \equiv 7b \pmod 9$, de unde $a \equiv 25a, 35a, 49a \pmod 9$ dar toate conduc la $3 \mid a$, contradicţie.

Soluţie: (*Diana Ţolu*)
Ca mai sus se arată că a şi b nu pot fi divizibile cu 3.
Dacă a^5b+3 şi b^5a+3 sunt cuburi perfecte, atunci şi produsul lor este cub perfect, deci $a^6b^6+3ab(a^4+b^4)+9$ este cub perfect nedivizibil cu 3. Cuburile pot fi congruente cu 0, 1 sau -1 modulo 9, deci $a^3b^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$, deci $a^6b^6 \equiv 1 \pmod 9$. Deducem că $a^6b^6+3ab(a^4+b^4)+9 \equiv 1 \pmod 9$ (nu poate fi -1 modulo 3), deci $3ab(a^4+b^4)+9 \equiv 0 \pmod 9$. Deducem că $3 \mid a^4+b^4$ şi, cum 3 este un număr prim

de forma $4k+3$, rezultă că $3 \mid a^2$ şi $3 \mid b^2$, adică $3 \mid a$ şi $3 \mid b$, contradicţie.

Soluţie: (*Vlad Vergelea*)
Presupunem prin absurd că cele două numere ar fi cuburi perfecte. Atunci ele ar fi congruente cu -1, 0 sau 1 modulo 9, deci a^5b şi ab^5 ar fi congruente cu 5, 6 sau 7 modulo 9. Pe de altă parte, produsul lor este a^6b^6, pătrat perfect şi cub perfect, deci congruent cu 0 sau 1 modulo 9. În tabelul de mai jos se vede restul la împărţirea cu 9 al produsului a două numere care dau resturile 5, 6 sau 7 la împărţirea cu 9:

	5	6	7
5	7	3	8
6	3	0	6
7	8	6	4

Deducem că $a^5b \equiv ab^5 \equiv 6 \pmod 9$. Dar atunci produsul lor ar fi divizibil cu 9 dar nu şi cu 27 deci nu poate fi cub perfect.