luni, 26 iunie 2017

Problema 1. Determinaţi toate mulţimile formate din şase numere naturale nenule consecutive care au proprietatea că produsul a două dintre numere, adunat cu produsul altora două dintre numere este egal cu produsul celor două numere rămase.

Problema 2. Fie x, y, z numere naturale nenule astfel încât $x \neq y \neq z \neq x$. Demonstraţi că

$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2) \geq 9xyz.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic astfel încât $AB \neq AC$ şi Γ, de centru O, cercul său circumscris. Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi D un punct pe Γ astfel încât $AD \perp BC$. Fie T un punct astfel încât $BDCT$ este paralelogram şi Q un punct de aceeaşi parte a dreptei BC ca şi A astfel încât

$$\angle BQM \equiv \angle BCA \quad \text{şi} \quad \angle CQM \equiv \angle CBA.$$

Dreapta AO intersectează Γ în E, $(E \neq A)$ iar cercul circumscris triunghiului ETQ intersectează Γ în punctul $X \neq E$. Demonstraţi că punctele A, M şi X sunt coliniare.

Problema 4. În plan se consideră un poligon regulat P cu $2n$ laturi, $A_1A_2 \ldots A_{2n}$, unde n este un număr natural nenul. Spunem că un punct S aflat pe o latură a lui P este vizibil dintr-un punct E exterior lui P, dacă segmentul deschis (SE) nu conţine puncte de pe laturile lui P. Colorăm laturile lui P cu trei culori (se ignoră vârfurile lui P, ele nu se colorează), astfel încât fiecare latură este colorată cu exact o culoare şi fiecare culoare este folosită măcar o dată. În plus, din orice punct al planului, exterior lui P, sunt vizibile puncte de cel mult două culori. Determinaţi numărul de colorări distincte de acest fel (două colorări sunt considerate distincte dacă măcar una din laturi este colorată diferit).

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare soluţie corectă este notată cu 10 puncte