BARAJUL 1 din CIPRU, 21.01.2017

Problema 1. Un tată a decis să împartă o anumită sumă de bani pe care o avea la bancă în felul următor:
Primul copil va primi 10000 de euro şi $\frac{1}{8}$ din suma rămasă. După scăderea părţii care îi revenea primului copil, al doilea copil va primi 20000 de euro şi $\frac{1}{8}$ din suma rămasă. După scăderea părţilor care le reveneau primilor doi copii, al treilea copil primeşte 30000 de euro şi $\frac{1}{8}$ din suma rămasă. Acest proces este urmat pentru toţi copiii. Ştiind că în urma acestui proces suma iniţială a fost împărţită în mod egal între toţi copiii, aflaţi:
a) numărul copiilor;
b) suma totală pe care tatăl a împărţit-o copiilor;
c) suma de bani care i-a revenit fiecărui copil.

Problema 2. Determinaţi toate valorile numărului întreg x pentru care numărul $k = \sqrt{x^2 - 6x + 14}$ este un număr întreg.

Problema 3. Într-un patrulater $ABCD$ avem $AB = CD$. Dacă E şi F sunt mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[BC]$, demonstraţi că dreapta EF face unghiuri egale cu dreptele AB şi CD.

Problema 4. Determinaţi numărul de moduri în care putem reprezenta numărul 2016 ca produs de trei numere naturale în condiţiile în care ţinem cont şi de ordinea factorilor produsului (adică reprezentările $1 \cdot 2 \cdot 1008$ şi $2 \cdot 1 \cdot 1008$ sunt considerate ca fiind diferite).

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute.

Soluţii:

Problema 1. Un tată a decis să împartă o anumită sumă de bani pe care o avea la bancă în felul următor:
Primul copil va primi 10000 de euro şi $\frac{1}{8}$ din suma rămasă. După scăderea părţii care îi revenea primului copil, al doilea copil va primi 20000 de euro şi $\frac{1}{8}$ din suma rămasă. După scăderea părţilor care le reveneau primilor doi copii, al treilea copil primeşte 30000 de euro şi $\frac{1}{8}$ din suma rămasă. Acest proces este urmat pentru toţi copiii. Ştiind că în urma acestui proces suma iniţială a fost împărţită în mod egal între toţi copiii, aflaţi:
a) numărul copiilor;
b) suma totală pe care tatăl a împărţit-o copiilor;
c) suma de bani care i-a revenit fiecărui copil.

Soluţie:
Dacă S este suma iniţială, primul copil a primit $10000 + \dfrac{S-10000}{8}$. Au rămas $S' = S - 10000 - \dfrac{S-10000}{8} = \dfrac{7}{8}(S - 10000)$ euro. Al doilea copil a primit $20000 + \dfrac{1}{8}(S' - 20000) = 20000 + \dfrac{7}{64}(S - 10000) - 2500$. Deoarece primul copil şi cel de-al doilea copil au primit aceeaşi sumă de bani, avem

$$10000 + \frac{S-10000}{8} = 20000 + \frac{7}{64}(S - 10000) - 2500.$$

De aici rezultă $\dfrac{1}{64}(S - 10000) = 7500$, deci $S = 490000$.
Primii doi copii au primit atunci câte $10000 + \dfrac{S-10000}{8} = 70000$ euro.
Dacă fiecare copil ia 70000 de euro, înseamnă că sunt 7 copii. Trebuie doar confirmat că în cazul a 7 copii şi a unei sume iniţiale de 490000, împărţind banii după regula anunţată, fiecare din cei 7 copii va primi câte 70000 de lei. Acest lucru se poate verifica uşor.

Problema 2. Determinaţi toate valorile numărului întreg x pentru care numărul $k = \sqrt{x^2 - 6x + 14}$ este un număr întreg.

Soluţie:
Numărul k este întreg dacă şi numai dacă $x^2 - 6x + 14 = k^2$ este pătrat perfect, adică dacă $k^2 - (x-3)^2 = 5$. Această relaţie revine la $(k - x + 3)(k + x - 3) = 5$. Cei doi factori au acelaşi semn şi suma $2k > 0$, deci avem posibilităţile:
1. $k - x + 3 = 5$, $k + x - 3 = 1$ care conduce la $x = 1$ (şi $k = 3$) şi
2. $k - x + 3 = 1$, $k + x - 3 = 5$ care conduce la $x = 5$ (şi la $k = 3$).
În concluzie, $x \in \{1,\ 5\}$.

Problema 3. Într-un patrulater $ABCD$ avem $AB = CD$. Dacă E şi F sunt mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[BC]$, demonstraţi că dreapta EF face unghiuri egale cu dreptele AB şi CD.

Soluţie:
Dacă $AB \parallel CD$, atunci $ABCD$ este paralelogram, iar unghiurile $\angle(EF, AB)$ şi $\angle(EF, CD)$ sunt, ambele, nule.
Dacă $AB \cap CD = \{G\}$, avem două cazuri: $G \in (BA \cap (CD$ şi $G \in (AB \cap (DC$. În ambele cazuri, afirmaţia rezultă din teorema bisectoarei glisante aplicate în triunghiul GBC, respectiv în triunghiul GAD.
Pentru demonstraţii ale acestei teoreme se poate consulta de exemplu materialul *Teorema bisectoarei glisante - the big picture* disponibil la secţiunea de materiale teoretice de geometrie.

Problema 4. Determinaţi numărul de moduri în care putem reprezenta numărul 2016 ca produs de trei numere naturale în condiţiile în care ţinem cont şi de ordinea factorilor produsului (adică reprezentările $1 \cdot 2 \cdot 1008$ şi $2 \cdot 1 \cdot 1008$ sunt considerate ca fiind diferite).

Soluţie: (oficială)
Avem $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Dacă $2016 = abc$, unde a, b, c sunt numere naturale, atunci $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 7^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 7^{\gamma_3}$, unde

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 5, \qquad (1)$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2, \qquad (2)$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 1. \qquad (3)$$

Ecuaţia (3) are **3** soluţii naturale (de forma $1 + 0 + 0$).
Ecuaţia (2) are **6** soluţii naturale (**3** de forma $1 + 1 + 0$ şi **3** de forma $2 + 0 + 0$).
Ecuaţia (1) are **21** de soluţii: **3** de forma $5 + 0 + 0$, **6** de forma $4 + 1 + 0$, **6** de forma $3 + 2 + 0$, **3** de forma $3 + 1 + 1$ şi **3** de forma $2 + 2 + 1$.
În total, există $3 \cdot 6 \cdot 21 = 378$ moduri de a-l scrie pe 2016 ca produs de trei numere naturale, respectând condiţiile problemei.