# BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
# Cipru, 4 martie 2017 (barajul 2)

**Problema 1.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$a + b + c = 2017 \quad \text{şi} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele

$$\frac{a^2 + b^2}{ab}, \ \frac{b^2 + c^2}{bc}, \ \frac{c^2 + a^2}{ca}$$

este mai mare sau egal cu 2016.

**Problema 2.** Determinaţi toate perecghile de numere întregi $(a, b)$ care satisfac ecuaţia

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2017}.$$

**Problema 3.** Fie $ABC$ un triunghi obtuzunghic cu $m(\sphericalangle ACB) > 90^\circ$ înscris într-un cerc $\mathscr{C}$ de centru $O$ şi rază $R$. Înălţimea $CK$, $K \in AB$ intersectează a doua oară cercul $\mathscr{C}$ în punctul $D$. Perpendiculara din $D$ pe $BC$ intersectează $AB$ în punctul $Z$. Demonstraţi că:
a) Perpendiculara din $B$ pe $CZ$ trece prin punctul $D$.
b) $CA = CZ$
c) $KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2 = 4R^2$.

**Problema 4.** Andreas, Vasilis, George, Dimitris şi Efthimios fac pase cu o minge respectând următoarele reguli:
- Vasilis şi George nu îşi pasează niciodată (nici Vasilis lui George, nici invers).
- Dimitris nu îi pasează niciodată lui Efthimios, dar Efthimios i-ar putea pasa lui Dimitris.
- Efthimios nu îi pasează niciodată lui Andreas, dar Andreas i-ar putea pasa lui Efthimios.

Aflaţi numărul de moduri în care băieţii pot schimba 5 pase ştiind că mingea pleacă de la Andreas şi, după cea de-a cincea pasă, revine la Andreas.
De exemplu, o astfel de succesiune de pase este:
Andreas $\to$ George $\to$ Andreas $\to$ Vasilis $\to$ Dimitris $\to$ Andreas.

**Notă:** Se ştie că nimeni nu-şi pasează sie însuşi.

*Timp de lucru:* 4 ore şi 30 de minute

**Soluţii oficiale:**

**Problema 1.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$a + b + c = 2017 \quad \text{şi} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele

$$\frac{a^2+b^2}{ab}, \ \frac{b^2+c^2}{bc}, \ \frac{c^2+a^2}{ca}$$

este mai mare sau egal cu 2016.

**Soluţie:**
Avem, succesiv,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 \cdot 2017$$

$$3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = 3 \cdot 2017$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca} = 3 \cdot 2016.$$

Această din urmă relaţie indică faptul că cel puţin unul dintre numerele

$$\frac{a^2+b^2}{ab}, \ \frac{b^2+c^2}{bc}, \ \frac{c^2+a^2}{ca}$$

este mai mare sau egal cu 2016 deoarece în caz contrar am avea

$$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca} < 3 \cdot 2016.$$

**Problema 2.** Determinaţi toate perecghile de numere întregi $(a, b)$ care satisfac ecuaţia

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2017}.$$

**Soluţie:** În condiţiile în care $ab \neq 0$, relaţia din enunţ se poate scrie în mod echivalent

$$2017ab = a + b$$
$$ab - 2017a - 2017b + 2017^2 = 2017^2$$
$$a(b-2017) - 2017(b-2017) = 2017^2$$
$$(a-2017)(b-2017) = 2017^2$$

Din ultima ecuaţie, deoarece 2017 este număr prim, rezultă că $(a-2017,\ b-2017) \in \{(1, 2017^2),\ (2017^2, 1),\ (2017, 2017),\ (-1, -2017^2),\ (-2017^2, -1),\ (-2017, -2017)\}$.
După ce eliminăm perechea $(a, b) = (0, 0)$, obţinem soluţiile:
$(a, b) \in \{(2018, 2017 \cdot 2018),\ (2017 \cdot 2018, 2018),\ (2 \cdot 2017, 2 \cdot 2017),\ (2016, -2016 \cdot$

2017), $(-2016 \cdot 2017, 2016)\}$.

**Problema 3.** Fie $ABC$ un triunghi obtuzunghic cu $m(\sphericalangle ACB) > 90°$ înscris într-un cerc $\mathscr{C}$ de centru $O$ şi rază $R$. Înălţimea $CK$, $K \in AB$ intersectează a doua oară cercul $\mathscr{C}$ în punctul $D$. Perpendiculara din $D$ pe $BC$ intersectează $AB$ în punctul $Z$. Demonstraţi că:
a) Perpendiculara din $B$ pe $CZ$ trece prin punctul $D$.
b) $CA = CZ$
c) $KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2 = 4R^2$.

**Soluţie:**
a) Punctul $B$ este ortocentrul triunghiului $BCZ$ deoarece este punctul de intersecţie a înălţimilor din $C$ şi $Z$. Atunci perpendiculara din $B$ pe $CZ$ trece prin cel de-al treilea vârf.
b) Avem $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle CDB) = 90° - m(\sphericalangle DCZ) = m(\sphericalangle CZA)$. Astfel, triunghiul $CAZ$ este isoscel şi $CA = CZ$.
c) Ducem diametrul $[AE]$. Atunci triunghiurile $ABE$ şi $ADE$ sunt dreptunghice în $B$, respectiv $D$. Deoarece $CD \parallel BE$ (ambele perpendiculare pe $AB$), rezultă că arcele $BC$ şi $DE$ sunt congruente, deci că $BC = DE$. (1)
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $AKD$ şi $CKB$ obţinem

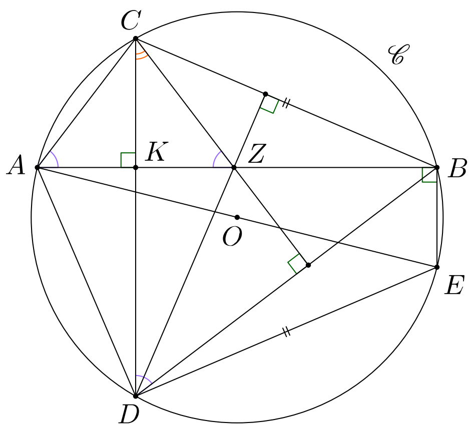
$$KA^2 + KD^2 = AD^2$$
$$KB^2 + KC^2 = BC^2.$$

Adunând ultimele două ecuaţii obţinem $KA^2+KB^2+KC^2+KD^2 = AD^2+BC^2$. Folosind relaţia (1) putem scrie că

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2 = AD^2 + DE^2,$$

iar din triunghiul dreptunghic $ADE$ rezultă că $AD^2+DE^2 = AE^2 = (2R)^2 = 4R^2$. Aşadar,

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2 = 4R^2.$$



**Problema 4.** Andreas, Vasilis, George, Dimitris şi Efthimios fac pase cu o minge respectând următoarele reguli:

• Vasilis şi George nu îşi pasează niciodată (nici Vasilis lui George, nici invers).

• Dimitris nu îi pasează niciodată lui Efthimios, dar Efthimios i-ar putea pasa lui Dimitris.

• Efthimios nu îi pasează niciodată lui Andreas, dar Andreas i-ar putea pasa lui Efthimios.

Aflaţi numărul de moduri în care băieţii pot schimba 5 pase ştiind că mingea pleacă de la Andreas şi, după cea de-a cincea pasă, revine la Andreas.

De exemplu, o astfel de succesiune de pase este:

Andreas $\rightarrow$ George $\rightarrow$ Andreas $\rightarrow$ Vasilis $\rightarrow$ Dimitris $\rightarrow$ Andreas.

**Notă:** Se ştie că nimeni nu-şi pasează sie însuşi.

**Soluţie:**

Considerăm că Andreas este cel care începe pasele şi notăm cu:

$A_n$ numărul de moduri în care mingea ajunge la Andreas după $n$ pase;
$B_n$ numărul de moduri în care mingea ajunge la Vasilis după $n$ pase;
$C_n$ numărul de moduri în care mingea ajunge la George după $n$ pase;
$D_n$ numărul de moduri în care mingea ajunge la Dimitris după $n$ pase;
$E_n$ numărul de moduri în care mingea ajunge la Efthimios după $n$ pase.

Din condiţiile problemei avem: $A_1 = 0$, $B_1 = C_1 = D_1 = E_1 = 1$ şi

$$A_{n+1} = B_n + C_n + D_n$$
$$B_{n+1} = A_n + D - n + E_n$$
$$C_{n+1} = A_n + D_n + E_n$$
$$D_{n+1} = A_n + B_n + C_n + E_n$$
$$E_{n+1} = A_n + B_n + C_n.$$

Întocmim următorul tabel:

| $n$ | $A_n$ | $B_n$ | $C_n$ | $D_n$ | $E_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 7 | 8 | 8 | 9 | 7 |
| 4 | 25 | 23 | 23 | 30 | 23 |
| 5 | 76 | | | | |

Aşadar avem 76 de moduri de a face 5 pase astfel încât mingea să plece şi să se întoarcă la Andreas.