BARAJ DE JUNIORI „Euclid"
Cipru, 9 mai 2015 (barajul 4)

Problema 1. Dacă polinomul $f(x) = (1 + x + x^2)^{25}$ se scrie sub forma

$$f(x) = (1 + x + x^2)^{25} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{49} x^{49} + a_{50} x^{50},$$

unde a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{50} sunt coeficienţii întregi ai polinomului, demonstraţi că:
a) numărul $K = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50}$ este par,
b) 8 divide $(K - 1)^2 - 1$.

Problema 2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x + y + z = 1$, aflaţi valoarea minimă a expresiei

$$A = \frac{x^3}{x^2 + yz} + \frac{y^3}{y^2 + zx} + \frac{z^3}{z^2 + xy}.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic ($AB < AC$) şi fie M mijlocul laturii $[BC]$. Ducem înălţimea AD şi bisectoarea d a unghiului $\sphericalangle BAC$ care intersectează latura $[BC]$ în punctul F. Ducem perpendicularele BE şi CK pe d, cu E, $K \in d$. Notăm cu T intersecţia dreptelor CK şi AD. Dacă dreapta TF intersectează ME în punctul P, demonstraţi că unghiurile $\sphericalangle EFP$ şi $\sphericalangle ABE$ sunt congruente.

Problema 4. Determinaţi cel mai mic număr natural nenul m astfel încât în orice submulţime cu m elemente a mulţimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ există două elemente, nu neapărat diferite, a căror sumă este o putere a lui 2.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Dacă polinomul $f(x) = (1 + x + x^2)^{25}$ se scrie sub forma

$$f(x) = (1 + x + x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50},$$

unde a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{50} sunt coeficienţii întregi ai polinomului, demonstraţi că:
a) numărul $K = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50}$ este par,
b) 8 divide $(K - 1)^2 - 1$.

Soluţie:
a) Avem $(1 + x + x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Pentru $x = 1$ obţinem $3^{25} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} + a_{50}$, iar
pentru $x = -1$ obţinem $1 = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots - a_{49} + a_{50}$.
Prin adunarea acestor două relaţii se ajunge la

$$1 + 3^{25} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50}).$$

Însă $3^{25} + 1 = 3^{25} - 1 + 2 = 2(3^{24} + 3^{23} + \ldots + 3 + 1 + 1)$. În paranteză avem o sumă de 26 de numere impare, deci suma numerelor din paranteză este pară. Prin urmare, $K = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50}$ este număr par.
b) $(K - 1)^2 - 1 = K^2 - 2K$. Ştim că $K = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $K - 2 = 2(n - 1)$ este număr par. Rezultă că

$$\frac{K(K-2)}{8} = \frac{4n(n-1)}{8} = \frac{n(n-1)}{2}$$

şi, cum $n(n-1)$ este număr par, există un număr întreg m astfel ca $n(n-1) = 2m$.
Atunci

$$\frac{K(K-2)}{8} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2m}{2} = m \in \mathbb{Z}.$$

Problema 2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x + y + z = 1$, aflaţi valoarea minimă a expresiei

$$A = \frac{x^3}{x^2 + yz} + \frac{y^3}{y^2 + zx} + \frac{z^3}{z^2 + xy}.$$

Soluţie:
Putem rescrie fracţiile din enunţ astfel

$$\frac{x^3}{x^2 + yz} = x - \frac{xyz}{x^2 + yz}$$

şi analog pentru celelalte fracţii. Vom obţine că

$$A = \frac{x^3}{x^2 + yz} + \frac{y^3}{y^2 + zx} + \frac{z^3}{z^2 + xy} = x + y + z - \left(\frac{xyz}{x^2 + yz} + \frac{xyz}{y^2 + zx} + \frac{xyz}{z^2 + xy}\right).$$

Din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică, avem

$$x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$$

şi analoagele care, prin adunare, conduc la

$$A \geq 1 - \left(\frac{xyz}{2x\sqrt{yz}} + \frac{xyz}{2y\sqrt{zx}} + \frac{xyz}{2z\sqrt{xy}} \right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right).$$

Folosind din nou inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică, avem

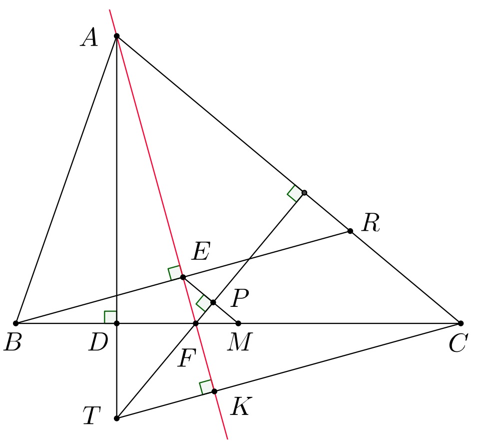
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{zx} \leq \frac{z+x}{2}.$$

Aşadar, $A \geq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2(x+y+z)}{2} \right) = \frac{1}{2}$.

Cum această valoare, $\frac{1}{2}$, este atinsă atunci când $x = y = z = \frac{1}{3}$, minimul căutat este $\frac{1}{2}$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic $(AB < AC)$ şi fie M mijlocul laturii $[BC]$. Ducem înălţimea AD şi bisectoarea d a unghiului $\sphericalangle BAC$ care intersectează latura $[BC]$ în punctul F. Ducem perpendicularele BE şi CK pe d, cu E, $K \in d$. Notăm cu T intersecţia dreptelor CK şi AD. Dacă dreapta TF intersectează ME în punctul P, demonstraţi că unghiurile $\sphericalangle EFP$ şi $\sphericalangle ABE$ sunt congruente.

Soluţie:



Deoarece $AK \perp CT$ şi $AD \perp AT$, F este ortocentrul triunghiului ATC. Deducem că $TP \perp AC$. Prelungind BE până intersectează AC în punctul R, avem că $[AE]$

este bisectoare şi înălţime în triunghiul ABR, deci este şi mediană. Prin urmare, E este mijlocul lui $[BR]$, deci ME este linie mijlocie în triunghiul BCR. Deducem că $ME \parallel AC$, deci $TP \perp ME$. Prin urmare,

$$\sphericalangle FEP \equiv \sphericalangle FAC.$$

Atunci

$$m(\sphericalangle EFP) = 90^\circ - m(\sphericalangle FEP) = 90^\circ - m(\sphericalangle FAC).$$

Avem şi

$$\sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle BAE.$$

Deducem că

$$m(\sphericalangle EFP) = 90^\circ - m(\sphericalangle FAC) = 90^\circ - m(\sphericalangle BAE) = m(\sphericalangle ABE).$$

Problema 4. Determinaţi cel mai mic număr natural nenul m astfel încât în orice submulţime cu m elemente a mulţimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ există două elemente, nu neapărat diferite, a căror sumă este o putere a lui 2.

Soluţie:
Cea mai mică putere a lui 2 mai mare ca 2015 este 2048. Avem

$$2048 = \underbrace{2015 + 33 = 2014 + 34 = 2013 + 35 = \ldots = 1025 + 1025}_{991 \text{ sume}}.$$

Ignorându-i momentan pe 32 şi pe 1024, avem

$$32 = \underbrace{31 + 1 = 30 + 2 = 29 + 3 = \ldots = 17 + 15}_{15 \text{ sume}}.$$

Rămâne 16. Astfel am împărţit mulţimea S în 1006 perechi cu suma putere a lui 2, plus numerele 16, 32 şi 1024. Dacă o submulţime cu 1007 elemente a lui S ar conţine vreunul din numerele 16, 32 sau 1024, am avea $16 + 16 = 32$, $32 + 32 = 64$ sau $1024 + 1024 = 2048$. Dacă o submulţime cu 1007 elemente a lui S nu conţine niciunul din numerele 16, 32 şi 1024, atunci din Principiul Cutiei, mulţimea conţine ambii termeni ai uneia din cele 1006 sume.
În concluzie, alegând 1007 numere, găsim printre ele întotdeauna două, nu neapărat diferite, cu suma putere a lui 2.
Rămâne să arătăm că 1007 este cel mai mic număr cu această proprietate.
Este suficient să construim o submulţime cu 1006 elemente a lui S în care suma nicicăror două elemente să nu fie putere a lui 2. O astfel de submulţime este

$$A = \{17, 18, 19, \ldots, 30, 31, 1025, 1026, \ldots, 2015\}.$$

• Dacă adunăm două elemente mai mari sau egale cu 1025 ale lui A obţinem un număr mai mare ca 2048 dar mai mic decât 4096, deci nu obţinem puteri ale lui 2.
• Dacă adunăm două elemente mai mici sau egale cu 31 ale lui A obţinem un număr mai mare ca 32 dar mai mic decât 64, deci nu obţinem puteri ale lui 2.
• Dacă adunăm două elemente ale lui A, unul mai mare sau egal cu 1025 cu unul mai mic sau egal cu 31, obţinem un număr mai mare ca 1024 dar mai mic decât 2048, deci nu obţinem puteri ale lui 2.