BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 18 aprilie 2015 (barajul 3)

Problema 1. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Problema 2. Dacă numerele reale x şi y sunt astfel încât

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2,$$

demonstraţi că numărul $1 - xy$ este pătrat perfect.[1]

Problema 3. Fiecare faţă a unui cub este colorată cu una din 6 culori date astfel ca nicicare două feţe vecine să nu fie colorate cu aceeaşi culoare. În câte moduri se poate face colorarea?[2]

Problema 4. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, H ortocentrul său, M mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[AH]$, iar O centrul cercului circumscris triunghiului BHC. Demonstraţi că patrulaterul $AFOM$ este paralelogram.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

[1] termenul de ,,pătrat perfect” este folosit imprecis - soluţia oficială arată că $1-xy$ este pătratul unui număr ... real; vă propun să demonstraţi că dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ satisfac relaţia din enunţ, atunci $1 - xy$ este pătratul unui număr raţional.

[2] Lipseşte din enunţ precizarea: ,,Două colorări care se obţin una din alta rotind cubul vor fi numărate o singură dată.”

Soluţii oficiale:

Problema 1. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Soluţie:[3]
Vom demonstra că $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3 \qquad (1)$ pentru orice număr real pozitiv x.
Într-adevăr, $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3 \Leftrightarrow x^3 + 2 \geq 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x + 2x^3 - 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) + 2(x^2 - 2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$, ceea ce este evident.
Aplicând inegalitatea (1) pentru $x = a$, $x = b$, $x = c$ şi adunând cele trei inegalităţi termen cu termen, se obţine inegalitatea din enunţ.

Problema 2. Dacă numerele reale x şi y sunt astfel încât

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2,$$

demonstraţi că numărul $1 - xy$ este pătrat perfect.

Soluţie:[4]
Dacă $xy = 0$, concluzia este evidentă.
Dacă $xy \neq 0$, putem împărţi ecuaţia din enunţ prin x^2y^2. Obţinem

$$\frac{x^5}{x^2y^2} + \frac{y^5}{x^2y^2} = 2 \Leftrightarrow x\left(\frac{x}{y}\right)^2 + y\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2.$$

Notând $k = \frac{y}{x}$ şi înlocuind $y = kx$ în relaţia precedentă, obţinem

$$\frac{x}{k^2} + k^3x = 2 \Leftrightarrow x(1 + k^5) = 2k^2 \Leftrightarrow \frac{2k^2}{1 + k^5} \qquad (1).$$

Atunci

$$y = kx = \frac{2k^3}{1 + k^5} \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$1 - xy = 1 - \frac{2k^2}{1 + k^5} \cdot \frac{2k^3}{1 + k^5} = \frac{(1 + k^5)^2 - 4k^5}{(1 + k^5)^2} = \left(\frac{1 - k^5}{1 + k^5}\right)^2.$$

[3] O altă idee: din inegalitatea mediilor, $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\ldots$

[4] Soluţia oficială rezolvă practic problema propusă în nota de subsol de pe pagina precedentă. Dacă trebuie doar arătat că $1 - xy$ este pătratul unui număr real, adică $1 - xy \geq 0$, este suficient să remarcăm că nu putem avea $x, y < 0$, apoi că dacă $xy < 0$ atunci afirmaţia este evidentă şi, în fine, că, dacă $x, y \geq 0$, din inegalitatea mediilor, $2x^2 = x^5 + y^5 \geq 2x^2y^2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq 1$.

Problema 3. Fiecare faţă a unui cub este colorată cu una din 6 culori date astfel ca nicicare două feţe vecine să nu fie colorate cu aceeaşi culoare. În câte moduri se poate face colorarea?

Soluţie:
Este evident că nu se pot folosi mai puţin de 3 culori.
(a) Dacă se folosesc numai 3 culori, fiecare culoare trebuie să apară în perechi de feţe opuse. Avem $\binom{6}{3} = 20$ moduri de a alege cele trei culori, deci 20 de colorări ale cubului cu 3 culori.
(b) Dacă se folosesc 4 culori, vom avea două perechi de feţe opuse care sunt colorate cu o aceeaşi culoare şi o pereche de feţe opuse colorate cu celelalte două culori. Avem $\binom{6}{2} = 15$ moduri de a alege cele două culori folosite la câte două feţe, apoi $\binom{4}{2} = 6$ moduri de a alege culorile folosite la câte o singură faţă. În total sunt aşadar $15 \cdot 6 = 90$ de colorări cu 4 culori.
(c) Dacă se folosesc 5 culori, vom avea o pereche de feţe opuse care sunt colorate cu o aceeaşi culoare şi alte 4 feţe colorate cu 4 culori diferite. Culoarea care apare pe două dintre feţe poate fi aleasă în $\binom{6}{1} = 6$ moduri. Cele patru culori care apar o singură dată pot fi alese în $\binom{5}{4} = 5$ moduri. Aceste culori vor fi împărţite în două perechi (au rămas două perechi de feţe opuse de colorat), iar această împărţire poate fi făcută în 3 feluri. Aşadar, în acest caz, sunt $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ de colorări.
(d) Dacă se folosesc toate cele 6 culori, fixăm una din culori. Culoarea pe care o putem pune pe faţa opusă poate fi aleasă în $\binom{5}{1} = 5$ moduri, iar împărţirea celorlalte culori în perechi (destinate perechilor de feţe opuse) poate fi făcută în 3 moduri. Ultimele două culori pot fi plasate în două poziţii care conduc la colorări diferite ale cubului, prin urmare, în acest caz, sunt $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ de colorări ale cubului.

În concluzie, în total, avem $20 + 90 + 90 + 30 = 230$ de moduri diferite de colorare a feţelor cubului.

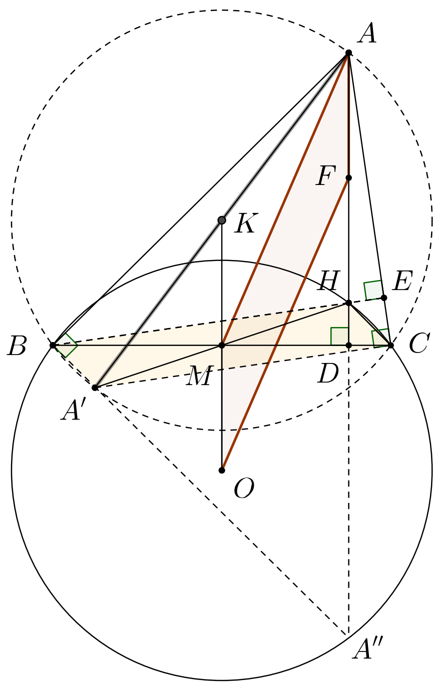
Problema 4. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, H ortocentrul său, M mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[AH]$, iar O centrul cercului circumscris triunghiului BHC. Demonstraţi că patrulaterul $AFOM$ este paralelogram.

Soluţia 1:
Fie K centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi A' diametral opusul punctului A în acest cerc. Atunci $BH \perp AC$ şi $A'C \perp AC$ ($m(\sphericalangle ACA') = 90°$), deci $BH \parallel CA'$. Analog, $CH \parallel BA'$. Rezultă că patrulaterul $BHCA'$ este paralelo-

gram, deci HA' trece prin M. Din triunghiul AHA' rezultă că

$$KM \parallel AH \text{ şi } KM = \frac{AH}{2} = AF. \qquad (1)$$

Deoarece simetricul ortocentrului unui triunghi faţă de una din laturile sale se află pe cercul circumscris triunghiului, simetricul A'' al lui A (care este ortocentrul triunghiului BHC) faţă de BC se află pe cercul (O) circumscris triunghiului BHC. Dar triunghiurile ABC şi $A''BC$ sunt congruente fiind simetrice, deci şi cercurile lor circumscrise sunt congruente. Atunci şi distanţele de la centrele celor două cercuri, O şi K, la coarda lor comună, $[BC]$, sunt egale, adică $OM = KM$. Din (1) rezultă atunci că $OM \parallel AF$ şi $OM = KM = AF$, de unde rezultă că patrulaterul $AFOM$ este paralelogram.



Soluţia 2:

Să observăm mai întâi că AF şi OM sunt paralele fiind, ambele, perpendiculare pe BC. Ştim că într-un triunghi, centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul sunt situate pe o dreaptă (dreapta lui Euler). Fie K centrul de greutate al triunghiului BHC. Atunci ortocentul A, centrul de greutate K şi centrul cercului circumscris, O, al triunghiului BHC sunt coliniare. Atunci triunghiurile AHK şi OMK sunt asemenea şi avem

$$\frac{OM}{HA} = \frac{KO}{KA} = \frac{KM}{KH} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2} \cdot AH = AF.$$

Aşadar $[AF]$ şi $[OM]$ sunt paralele şi congruente, de unde rezultă că $AFOM$ este paralelogram.