BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 24 ianuarie 2015 (barajul 1)

Problema 1. Detereminaţi toate perechile de numere naturale nenule (x, y) care satisfac ecuaţia

$$1+\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{x}+\frac{5}{xy}\,.$$

Problema 2. Determinaţi toate numerele întregi n cu proprietatea că $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ este număr raţional.

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$, iar (BD) şi (CE), cu $D\in AC$, $E\in AB$, bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$, respectiv $\sphericalangle C$. Demonstraţi că:
a) $\sphericalangle BDC\equiv\sphericalangle AEC$,
b) $BC=BE+CD$.

Problema 4. Se scriu k numere reale ($k\geq 5$) pe o dreaptă astfel încât:
(a) suma oricăror trei numere consecutive este pozitivă,
(b) suma oricăror cinci numere consecutive este negativă.
Determinaţi cea mai mare valoare a lui k pentru care acest lucru este posibil.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Deteremінaţi toate perechile de numere naturale nenule (x, y) care satisfac ecuaţia

$$1+\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{x}+\frac{5}{xy}\,.$$

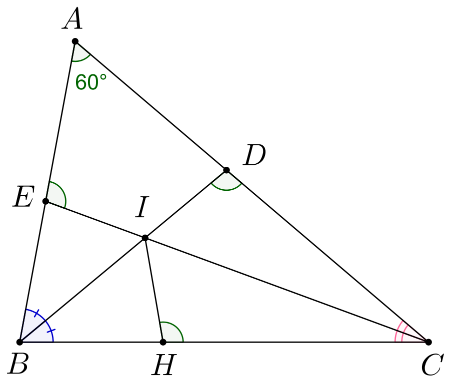
Soluţie:
Eliminând numitorii, ecuaţia din enunţ se scrie $xy+3y+2x=y^2+5$ sau $x(y+2)=y^2-3y+5$. Deoarece $y=-2$ nu convine, rezultă că $x=\dfrac{y^2-3y+5}{y+2}=y-5+\dfrac{15}{y+2}$ $(*)$. De aici rezultă că $(y+2)\mid 15$, adică $y+2\in\{1,3,5,15\}$, deci $y\in\{1,3,13\}$. Revenind la $(*)$, obţinem soluţiile $(x,y)\in\{(1,1),\ (1,3),\ (9,13)\}$.

Problema 2. Determinaţi toate numerele întregi n cu proprietatea că $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ este număr raţional.

Soluţie:
Impunem condiţia $\dfrac{4n-2}{n+5}\geq 0$ care revine la $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\}$.
Dacă $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ este raţional, atunci există numerele naturale prime între ele a şi b astfel ca $\dfrac{4n-2}{n+5}=\dfrac{a^2}{b^2}$. De aici rezultă că $n=\dfrac{5a^2+2b^2}{4b^2-a^2}=-5+\dfrac{22b^2}{4b^2-a^2}$.
Deducem că $(2b-a)(2b+a)$ divide $22b^2$. Cum factorii $2b\pm a$ sunt primi cu b (dacă d ar fi un divizor comun atunci el ar divide atât pe b cât şi pe a), rezultă că $(2b-a)(2b+a)\mid 22$. Observăm că $a=0$ nu convine, deci numerele $a-2b$ şi $a+2b$ trebuie să fie divizori diferiţi, dar de aceeaşi paritate, ai lui 22. Cum 22 nu este multiplu de 4, deducem că $a\pm 2b$ sunt impari. Avem cazurile: $a+2b=11$, $a-2b=1$; $a+2b=11$, $a-2b=-1$; $a+2b=1$, $a-2b=-1$ şi $a+2b=1$, $a-2b=-11$. Obţinem soluţie numai în cazul al doilea, şi anume $a=5$, $b=3$, ceea ce conduce la $n=13$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$, iar (BD) şi (CE), cu $D\in AC$, $E\in AB$, bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$, respectiv $\sphericalangle C$. Demonstraţi că:
a) $\sphericalangle BDC\equiv\sphericalangle AEC$,
b) $BC=BE+CD$.

Soluţie:



a) Din triunghiul ABD avem $m(\sphericalangle BDC) = 60^\circ + \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2}$.

Din triunghiul BCE, $m(\sphericalangle AEC) = m(\sphericalangle B) + \dfrac{m(\sphericalangle C)}{2} = \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2} + \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2} + \dfrac{m(\sphericalangle C)}{2} = \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2} + 90^\circ - \dfrac{m(\sphericalangle A)}{2} = \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2} + 60^\circ = m(\sphericalangle BDC)$.[1]

b) În triunghiul BCD avem $m(\sphericalangle BDC) = 60^\circ + \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2} > \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2} = m(\sphericalangle DBC)$, deci $BC > CD$. Atunci putem alege $H \in (BC)$ astfel ca $CH = CD$. Vom arăta că $BH = BE$.

Dacă I este punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC, avem $\sphericalangle ICD \equiv \sphericalangle ICH$, $IC = IC$ şi $CD = CH$, deci triunghiurile ICD şi ICH sunt congruente (ULU). Rezultă că $\sphericalangle CHI \equiv \sphericalangle CDI \equiv \sphericalangle AEI$, de unde $\sphericalangle HIB \equiv \sphericalangle EIB$. Atunci triunghiurile BEI şi BHI sunt congruente ($\sphericalangle HIB \equiv \sphericalangle EIB$, $IB = IB$ şi $\sphericalangle HBI \equiv \sphericalangle EBI$), deci $BE = BH$. Rezultă atunci că $BC = BH + HC = BE + CD$.

Problema 4. Se scriu k numere reale ($k \geq 5$) pe o dreaptă astfel încât:
(a) suma oricăror trei numere consecutive este pozitivă,
(b) suma oricăror cinci numere consecutive este negativă.
Determinaţi cea mai mare valoare a lui k pentru care acest lucru este posibil.

Soluţie:
Pentru $k = 5$ putem lua numerele $4, -7, 4, 4, -7$ care îndeplinesc condiţiile (a) şi (b).
Pentru $k = 6$ putem lua numerele $4, -7, 4, 4, -7, 4$ care îndeplinesc condiţiile (a) şi (b).

---

[1] Se ştie că $m(\sphericalangle BIC) = 90^\circ + \dfrac{m(\sphericalangle A)}{2} = 120^\circ$, deci $ADIE$ este inscriptibil, de unde rezultă **a)**.

Vom arăta că pentru $k \geq 7$ nu mai există numere care să îndeplinească cele două condiţii. Presupunând contrariul, dacă a, b, c, d, e, f, g sunt şapte numere consecutive din cele $k \geq 7$, atunci din (a) rezultă că $a + b + c > 0$ şi $c + d + e > 0$, deci $(a + b + c + d + e) + c > 0$. Dar din (b) avem că $a + b + c + d + e < 0$, deci trebuie ca $c > 0$. Analog se arată că $d > 0$ şi $e > 0$.
Din $(a+b+c)+(d+e+f) > 0$ şi $a+b+c+d+e < 0$ şi $b+c+d+e+f < 0$ rezultă $f > 0$ şi $a > 0$. Analog se arată că $b > 0$, $g > 0$. Aşadar $a, b, c, d, e, f, g > 0$, ceea ce contrazice (b).
Prin urmare, numărul maxim de numere cu proprietatea din enunţ este $k = 6$.