BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 8 martie 2014 (barajul 2)

Problema 1. Determinaţi numerele naturale x care verifică ecuaţia

$$x^3 - x + p = 507,$$

unde p este un număr prim.

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere întregi (a, b) care satisfac ecuaţia

$$2014(a^2 - 1) + 4ab^2 = 2011(a^2 - b^2) + 4a^2b^2.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$ şi O centrul cercului său circumscris. Înălţimile AD, BE şi CF se intersectează în H. Arătaţi că punctele O, E, H şi F sunt vârfurile unui paralelogram.

Problema 4. Elevii unei şcoli din Lefkara, după devastatorul incendiu care a mistuit anul trecut pădurile din zona lor, au decis ca pe parcursul a 50 de zile consecutive, să planteze în total 79 de copaci. De asemenea, ei au stabilit să planteze cel puţin un copac în fiecare zi. Arătaţi că există un grup de zile consecutive (posibil şi o singură zi), în care elevii au plantat în total 20 de copaci.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi numerele naturale x care verifică ecuaţia

$$x^3 - x + p = 507,$$

unde p este un număr prim.

Soluţie:
Ecuaţia se scrie $x(x-1)(x+1)+p = 507$ şi, deoarece $x(x-1)(x+1)$ este întotdeauna divizibil cu 3 (produs de trei numere consecutive), iar 507 este şi el divizibil cu 3, rezultă că p este multiplu de 3. Cum însă p este prim, trebuie ca $p = 3$. Atunci ecuaţia devine $(x-1)x(x+1) = 504$. adică $(x-1)x(x+1) = 7\cdot 8\cdot 9$, de unde $x = 8$.

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere întregi (a, b) care satisfac ecuaţia

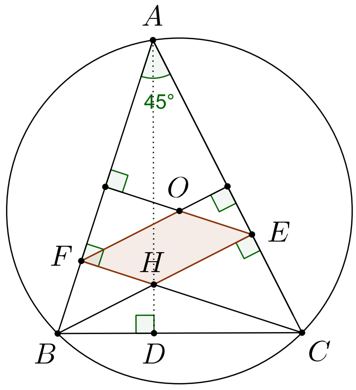
$$2014(a^2 - 1) + 4ab^2 = 2011(a^2 - b^2) + 4a^2b^2.$$

Soluţie:
Ecuaţia se scrie echivalent:
$2014a^2 - 2014 + 4ab^2 = 2011a^2 - 2011b^2 + 4a^2b^2$ adică $b^2 = \dfrac{3a^2 - 2014}{4a^2 - 4a - 2011}$.
Deoarece b^2 este număr întreg, trebuie ca $4a^2 - 4a - 2011 \leq 3a^2 - 2014$, adică $a^2 - 4a + 3 \leq 0$, ceea ce revine la $1 \leq a \leq 3$, deci la $a \in \{1, 2, 3\}$.
• Dacă $a = 1$, atunci $b^2 = 1$, deci $b = \pm 1$.
• Dacă $a = 2$, atunci $b^2 = \dfrac{2002}{2003} \notin \mathbb{Z}$.
• Dacă $a = 3$, atunci $b^2 = 1$, deci $b = \pm 1$.
În concluzie, perechile (a, b) căutate sunt $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(3, 1)$ şi $(3, -1)$.[1]

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC) = 45°$ şi O centrul cercului său circumscris. Înălţimile AD, BE şi CF se intersectează în H. Arătaţi că punctele O, E, H şi F sunt vârfurile unui paralelogram.

Soluţie:

[1] Rezolvarea este greşită: la pasul $b^2 \geq 1 \Rightarrow 4a^2 - 4a - 2011 \leq 3a^2 - 2014$ s-a înmulţit cu un numitor al cărui semn este incert. În realitate, $b^2 \geq 1 \Leftrightarrow -21 \leq a \leq 22$, dar, verificând toate aceste cazuri se constată că fracţia ia valori naturale numai dacă $a \in \{1, 3\}$, deci răspunsul din soluţia oficială este corect.



Triunghiurile AEB şi ACF sunt dreptunghice isoscele cu ipotenuzele $[AB]$, respectiv $[AC]$. Atunci punctele E şi F aparţin meiatoarelor acestora. Dar şi centrul cercului circumscris, O, se află pe mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$ pentru că acestea sunt coarde în cercul circumscris. Aşadar dreptele EO şi FO sunt mediatoarele segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, deci $EO \parallel HF$ şi $FO \parallel HE$, de unde rezultă că $OEHF$ este paralelogram.

Problema 4. Elevii unei şcoli din Lefkara, după devastatorul incendiu care a mistuit anul trecut pădurile din zona lor, au decis ca pe parcursul a 50 de zile consecutive, să planteze în total 79 de copaci. De asemenea, ei au stabilit să planteze cel puţin un copac în fiecare zi. Arătaţi că există un grup de zile consecutive (posibil şi o singură zi), în care elevii au plantat în total 20 de copaci.

Soluţie:[2]
Fie a_n, $(n = 1, 2, \ldots, 50)$ numărul total de copaci plantaţi până în ziua a n-a inclusiv. Atunci avem

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{49} < a_{50} = 79 \qquad (1).$$

Considerăm numerele: $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $a_3 + 20$, ... , $a_{49} + 20$ şi $a_{50} + 20$.
Conform (1), avem: $21 \leq a_1 + 20 < a_2 + 20 < a_3 + 20 < \ldots < a_{49} + 20 < a_{50} + 20 = 99$.
Avem aşadar 100 de numere, a_1, a_2, ..., a_{49}, a_{50}, a_1+20, a_2+20, ..., $a_{49}+20$, $a_{50}+20$ care pot lua cel mult 99 de valori.
Rezultă că două dintre aceste numere sunt egale şi nu putem avea nici $a_i = a_j$, nici $a_i + 20 = a_j + 20$ cu $i \neq j$, deci vom avea o egalitate de tipul $a_i = a_j + 20$, adică numerele egale provin unul din mulţimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_{50}\}$, iar celălalt din mulţimea $\{a_1 + 20, a_2 + 20, \ldots, a_{50} + 20\}$. Atunci $a_i - a_j = 20$, ceea ce înseamnă că în zilele $j + 1$, $j + 2$, ... , i s-au plantat în total exact 20 de copaci.

[2] vezi şi
http://artofproblemsolving.com/community/c33t314f6h1178906_pigeon_hole_principle