BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 15 februarie 2014 (barajul 1)

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\sphericalangle BAC) = 90°$), M un punct oarecare pe ipotenuza $[BC]$, iar D şi E proiecţiile punctului M pe catetele AB, respectiv AC. Demonstraţi că

$$DE \geq \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

unde b şi c sunt lungimile catetelor. Pentru ce poziţii ale punctului M avem egalitate în inegalitatea de mai sus?

Problema 2. Determinaţi cel mai mic număr natural de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ care îndeplineşte simultan condiţiile:

- $\frac{1}{2}$ din el este cubul unui număr natural;
- $\frac{1}{3}$ din el este puterea a 7-a a unui număr natural;
- $\frac{1}{7}$ din el este pătrat perfect.

Problema 3. Arătaţi că:
a) numărul $A = n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$, $n \in \mathbb{N}$, este produsul a şapte numere întregi consecutive;
b) 2520 divide A.

Problema 4. Un punct (x, y) într-un sistem de coordonate rectangular se numeşte **laticial** dacă numerele x şi y sunt întregi. Arătaţi că oricum am alege cinci puncte laticiale în plan, există printre ele două care determină un segment al cărui mijloc este tot punct laticial.

Notă: Dacă $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte, atunci mijlocul segmentului determinat de ele este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\sphericalangle BAC) = 90°$), M un punct oarecare pe ipotenuza $[BC]$, iar D şi E proiecţiile punctului M pe catetele AB, respectiv AC. Demonstraţi că

$$DE \geq \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

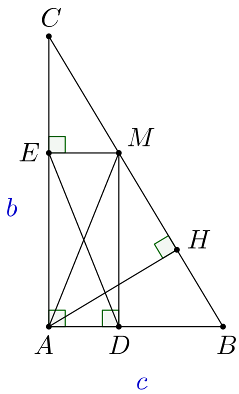
unde b şi c sunt lungimile catetelor. Pentru ce poziţii ale punctului M avem egalitate în inegalitatea de mai sus?

Soluţie:

$ADME$ fiind dreptunghi, diagonalele AM şi DE sunt egale. Dacă $[AH]$ este înălţimea corespunzătoare ipotenuzei in triunghiul ABC, atunci $DE = AM \geq AH$. (1)

Din $AB \cdot AC = BC \cdot AH$, adică $bc = \sqrt{b^2 + c^2} \cdot AH$, deducem $AH = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. (2)

Din (1) şi (2) dducem că $DE \geq \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, cu egalitate dacă şi numai dcă $M = H$.



Problema 2. Determinaţi cel mai mic număr natural de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ care îndeplineşte simultan condiţiile:

- $\dfrac{1}{2}$ din el este cubul unui număr natural;
- $\dfrac{1}{3}$ din el este puterea a 7-a a unui număr natural;
- $\dfrac{1}{7}$ din el este pătrat perfect.

Soluţie:

Numerele 2, 3 şi 7 sunt prime şi relativ prime.

Jumătate din număr este $2^{a-1} \cdot 3^b \cdot 7^c$ şi, potrivit ipotezei, trebuie ca $a-1$, b şi c să fie divizibile cu 3.

O treime din număr este $2^a \cdot 3^{b-1} \cdot 7^c$ şi, potrivit ipotezei, trebuie ca a, $b-1$ şi c să fie divizibile cu 7.

O şeptime din număr este $2^a \cdot 3^b \cdot 7^{c-1}$ şi, potrivit ipotezei, trebuie ca a, b şi $c-1$ să fie divizibile cu 2.

Aşadar a este multiplu de 2 şi de 7, iar $a-1$ este multiplu de 3, deci $a = 28$.

Cum b este multiplu de 2 şi 3, iar $b-1$ este multiplu de 7, rezultă $b = 36$.

În fine, din c multiplu de 3 şi 7, iar $c-1$ par, rezultă $c = 21$.

Astfel, numărul căutat este $2^{28} \cdot 3^{36} \cdot 7^{21}$.

Problema 3. Arătaţi că:
a) numărul $A = n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$, $n \in \mathbb{N}$, este produsul a şapte numere întregi consecutive;
b) 2520 divide A.

Soluţie:
a) $A = n^7-14n^5+49n^3-36n = n(n^6-14n^4+49n^2-36) = n(n^6-4n^4-10n^4+40n^2+9n^2-36) = n\big(n^4(n^2-4)-10n^2(n^2-4)+9(n^2-4)\big) = n(n^2-4)(n^4-10n^2+9) = n(n^2-2)(n^2-1)(n^2-9) = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$
b) A este produsul a 7 numere consecutive. Atunci:
- cel puţin trei dintre factori sunt divizibili cu 2,
- cel puţin doi dintre factori sunt divizibili cu 3,
- cel puţin un factor este divizibil cu 5,
- cel puţin un factor este divizibil cu 7.

În concluzie,[1] $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \mid A$, adică $2520 \mid A$.

Problema 4. Un punct (x, y) într-un sistem de coordonate rectangular se numeşte **laticial** dacă numerele x şi y sunt întregi. Arătaţi că oricum am alege cinci puncte laticiale în plan, există printre ele două care determină un segment al cărui mijloc este tot punct laticial.

<u>*Notă*</u>: Dacă $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte, atunci mijlocul segmentului determinat de ele este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Soluţie:
Dacă $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte laticiale, mijlocul segmentului determinat de ele, $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, este punct laticial dacă şi numai dacă numerele $a = \frac{x_1+x_2}{2}$ şi $b = \frac{y_1+y_2}{2}$ sunt, ambele, numere întregi.
Pentru coordonatele fiecărui punct A avem următoarele patru cazuri:
I. x_1 impar, y_1 impar
II. x_1 impar, y_1 par
III. x_1 par, y_1 impar
IV. x_1 par, y_1 par.
Conform principiului cutiei, din cele 5 puncte date, cel puţin două se vor afla în caz (din cele patru de mai sus).
Dacă două puncte se află în primul caz, ele îndeplinesc cerinţa pentru că $x_1 + x_2$ este par şi $y_1 + y_2$ este par.
Dacă două puncte se află în cel de-al doilea caz, ele îndeplinesc cerinţa pentru că $x_1 + x_2$ este par şi $y_1 + y_2$ este par.
Dacă două puncte se află în cel de-al treilea caz, ele îndeplinesc cerinţa pentru că

[1] Se arată uşor că de fapt $5040 \mid A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ şi că acesta este cel mai mare divizor comun al tuturor numerelor de această formă.

$x_1 + x_2$ este par şi $y_1 + y_2$ este par.
Dacă două puncte se află în cazul al patrulea, ele îndeplinesc cerinţa pentru că $x_1 + x_2$ este par şi $y_1 + y_2$ este par.
Demonstraţia este terminată.